

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

50e jaargang
1974/1975
~~no 3~~
november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 26,50. Hiervoor wende men zich tot:

Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.
Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 225,—, $^1/_2$ pag. *f* 120,— en $^1/_4$ pag. *f* 67,50.

Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs (3)

'MEETKUNDE OP DE BASISSCHOOL'

ED DE MOOR   ADRI TREFFERS

Inleiding

Aan het slot van de twee vorige artikelen (2) hebben wij aangekondigd in te gaan op het meetkunde-onderwijs op de basisschool. Nu lijkt dit niet mogelijk zonder iets over de problematiek van het wiskunde-onderwijs op de basisschool in het algemeen uit de doeken te doen. Hoewel velen 'wiskunde en basis-onderwijs' als onverenigbare begrippen zien, willen wij ons toch van de term wiskunde bedienen, omdat 'rekenen' een te enge omschrijving is van het totaal aan aktiviteiten, dat in het volgende aan de orde zal komen.
Trachten wij enige orde te scheppen in de stroom van vernieuwingen die zich vooral in het buitenland in de zestiger jaren hebben voltrokken, dan kunnen wij 5 richtingen in het reken-wiskunde-onderwijs onderscheiden: Wij noemen deze:

1 Het traditionele rekenonderwijs
2 Het vernieuwde rekenonderwijs
3 De matematisch-empirische richting
4 De matematisch-aritmetische richting
5 De matematisch-strukturele richting

We zullen van elk van deze vijf richtingen een korte karakteristiek trachten te geven. Zoals bij veel van dit soort indelingen is het moeilijk om de 'hokjes' strikt gescheiden te houden, zo is het ook moeilijk om te determineren of dit of dat soort onderwijs (c.q. leerboekje) in dit of dat 'hokje' hoort. Voor degenen, die zich ruimer willen oriënteren omtrent deze materie, verwijzen wij naar 'maTEMAtika'. (3)

1. Wiskunde op de basisschool

1.1 '*Het traditionele rekenen*'

Vrijwel allen, die dit lezen, zullen opgegroeid zijn met dit systeem. Centraal stond het cijferen, zowel schriftelijk als uit het hoofd, het 'aanleren' van het metrieke stelse, het decimale stelsel, procentrekening, uitgebreide oefeningen met breuken en als hoogste nivo de zogeheten redaktievraagstukken. Hoewel veel hierop is bezuinigd in de laatste jaren, worden nog vele leerboeken in deze trant gebruikt en is de waardering voor het louter algoritmische aspekt zeer groot.

1.2. *Het vernieuwde rekenonderwijs*

Deze richting onderscheidt zich van de vorige door een nieuwe didaktische aanpak. De traditionele stof blijft gehandhaafd, maar men probeert voornamelijk in de hogere klassen het onderwijs een wat dynamischer karakter te geven door te trachten aan te sluiten bij het leven van alledag.
Krante-artikelen, het spoorboekje, de weerkaart, aktuele t.v.- uitzendingen, het statistisch zakboek kunnen aanleiding geven tot rekenaktiviteiten.
Het vernieuwde rekenonderwijs tracht dus het traditionele rekenonderwijs uit het isolement van voortdurende dril te verlossen. Het is vooral didaktisch een vernieuwing, terwijl aan de traditionele stofinhoud weinig veranderd wordt.

1.3. *'De matematisch-empische richting'*

Bij deze richting wordt de nadruk gelegd op het 'handelend leren' (learning bij doing), op het kreatieve element, zowel bij leraar als leerling en op de zelfontdekkende werkwijze, die bij 'probleemgeorienteerd' onderwijs centraal staat. Het traditionele rekenonderwijs wordt geïnjekteerd met aktiviteiten als meetkunde, waartoe ook meten, grafische verwerking en eenvoudige topologische problemen behoren.
Niet het leerboekje, maar de werkkaart en het bijbehorende materiaal nemen een belangrijke plaats in en de onderwijzer is een stimulator en begeleider in het werklokaal, dat vroeger de klas heette. De kinderen zelf nemen waar, ontwikkelen een geschikte taal voor de beschrijving van de waarnemingen, beschrijven de aktiviteiten in deze taal en komen tot analogieredeneringen. Men staat in deze richting gereserveerd ten opzichte van het gebruik van de verzamelingentaal. Wat de leerstof betreft, maakt de richting een evolutionaire indruk, terwijl de didaktische aanpak meer revolutionair genoemd kan worden.

1.4. *De matematisch-aritmetische richting*

Deze richting wijkt vooral wat de stofinhoud betreft sterk af van de vorige richting. Veel 'moderne' elementen worden toegevoegd. We noemen:
talstelsels, klokrekenen, kansrekening, rekenen met andere 'dingen' dan getallen (draaiingen bijvoorbeeld), het gebruik van ongelijkheden ($<$, $>$, $\neq$), het gebruik van 'frames' ($\square + 3 > 15$) en vooral het vroegtijdig introduceren van begrippen uit de verzamelingentaal en het gebruik van deze begrippen voor het aanleren van het getalbegrip en de basisoperaties. Er is weinig fleksibiliteit voor het ontwikkelen van eigen 'taaltjes', maar vanaf het begin wordt het heilige geloof in de verzamelingenleer ondersteund door het gebruiken van symbolen als $\cap$, $\cup$, $\subset$, $\in$, etc. Didaktisch gezien, is er nauwelijks van vernieuwing sprake. Het leerboekje staat centraal en dril is een belangrijke komponent van de didaktiek.

1.5. *De matematisch-strukturele richting*

Deze richting gaat nog meer dan de matematisch-aritmetische richting weg

van het traditionele rekenen en beweegt zich verder in de richting van de 'formele' wiskunde. Centraal staat het leren van matematische strukturen. Logika, transformaties, topologie, verzamelingenleer, talstelsels, struktuurspelen, vektoren en kansrekening dringen de traditionele onderwerpen naar de achtergrond. Er is een sterk aksent op het logisch redeneren en de wiskunde zelf is de inspiratiebron voor het onderwijs. Vertegenwoordigers van deze richting zijn dan ook van mening, dat kunstmatig materiaal (struktureel materiaal) meer gelegenheid biedt om bepaalde wiskundige begrippen te leren dan spullen uit de natuurlijke alledaagse omgeving van het kind. Ook de verzamelingentaal wordt direkt vanaf de eerste klas gehanteerd, doch met grotere zorgvuldigheid dan bij de matematisch-aritmetische richting.
Bij de didaktiek hecht men veel waarde aan de zelfontdekkende werkwijze.

1.6. *Een opvallende gelijkenis*

Hoewel men voorzichtig dient te zijn met vergelijkingen te trekken, is het het toch interessant de onder 1.3., 1.4. en 1.5. genoemde richtingen binnen het reken-wiskunde-onderwijs te vergelijken met de eerder onderscheiden stromingen[2] binnen het aanvankelijk meetkunde-onderwijs in de jaren 1920–1940. We vatten dit onder verwijzing naar het vorige artikel summier samen.

Meetkunde-onderwijs 1920–1940	Wiskunde op de basisschool vanaf 1960	Korte karakteristiek
Logisch-deduktieve stroming (Dijksterhuis, Beth, e.a.)	Matematisch-strukturele richting	Wiskunde als inspiratiebron en doel in zich. Snel naar het deduktieve systeem.
Empirische stroming (Reindersma, e.a.)	Matematisch-aritmetische richting	Informele inleiding, gevolgd door een grondiger opbouw. Tamelijk veel routinematige vraagstukken
Intuïtieve stroming (Ehrenfesst-Afanassjewa, Van Hiele Geldof, e.a.)	Matematisch-empirische richting	Veelzijdige benadering. Deduktief systeem als laagste en hoogste nivo. Didaktisch gezien revolutionair van aanpak.

2. Het Ontario programma

Inleiding

Tot begin 1960 treffen we vrijwel niets aan meetkunde in het basisschoolprogramma aan. Vrijwel tegelijk met de verminderde belangstelling voor meetkunde in het V.O. lijkt de interesse binnen het basisonderwijs toe te nemen, maar een konsensus schijnt nauwelijks te bestaan. Vooral de moei-

lijkheid om een vertikaal geplande leerstofordening van kleuterschool tot in het hoger beroepsonderwijs aan te brengen, lijkt onoverkomelijk.
Tot zijn er enkele pogingen ondernomen een dergelijk programma tot stand te brengen. Eén van deze ontwerpen is het GEOMETRY REPORT (Kindergarten to grade thirteen) van het Ontario Institute for Studies in Education[4], waaraan o.a. de befaamde meetkundige Coxeter heeft meegewerkt. Het rapport bevat voorstellen op drie nivo's:

A) (kleuterschool-basisschool)
B) ('middenschool')
C) (voortgezette opleiding)

Als voorbeeld geven we een samenvatting van de voorstellen voor nivo A. Het is een angelsaksische gewoonte om voor dit nivo de meetkundestof te verdelen in 'Shape' (vorm), 'Size' (grootte) en 'Measurement' (meten). Men geeft geen werkelijke vertikale planning, doch men doet aanbevelingen voor 'topics' en men kan de samenhang tussen deze topics aflezen in het overzicht aan het einde van deze paragraaf.
We volgen nu deze topics en geven bij elk een voorbeeld, aan het programma ontleend. 'Shape' en 'Size' onderwerpen zijn vooral voor de lagere klassen bedoeld, die over 'Measurement' meer voor de hogere klassen.

2.1. *Shape*

a *Driedimensionale figuren*: Laat de kinderen aan de hand van 'modellen' vertrouwd raken met kegels, cylinders, bollen en veelvlakken. Laat ze deze vooral in hun omgeving ontdekken en op hun gebruik letten.
b *Tweedimensionale figuren*: Aan de hand van de zijvlakken van de 3-D figuren kunnen zij de 2-D figuren leren kennen en klassificeren.
Begrippen als gekromd, recht, (hoek)punt, hoek (corner, angle), kant of lijn, grens(lijn), driehoek, vierkant, rechthoek, etc. komen aan de orde.
c *Punten, lijnen en hoeken*. Deze komen ter sprake bij het in b en d genoemde.
d *Konstrukties van 2-D figuren*. Gebruik hiervoor het spijkerbord. Ga met rietjes, pijpestokers en meccano aan de gang. Stijf zijn van een figuur (nodige gegevens voor een konstruktie) komt reeds ter sprake.
e *Konstruktie van 3-D figuren*. Modellen maken met behulp van rietjes, pijpestokers, klei, stokjes, karton, kant en klare veelhoeken, papier en plasticine.
f *Meetkundige patronen*. Begin met patronen uit de omgeving als behangselpapier, tapijten en tegelvloeren. Laat zelf patronen maken. Laat ontdekken met welke figuren het vlak is vol te leggen.
Voorbereiding op transformaties en oppervlaktebegrip.
g *Transformaties*. Met behulp van papiervouwen, doorkijkspiegels, doorzichtige roosters, verschuivingen en draaiingen, worden de begrippen symmetrie en a-symmetrie voorbereid.
h *Krommen*. Laat de kinderen papiermodellen van kegels en cylinders doorknippen. Cirkels, spiralen en ellipsen met potlood en touwtje maken.
Als de kinderen in staat zijn met passer en tekendriehoek te werken, dan

kunnen ze zelf patronen ontdekken (zie g). Ook ruimtekrommen maken met draad.
i *Projekties en schaduwen.* Maak schaduwen op de wand van vierkanten, rechthoeken en cirkels. Meten van lengtes van schaduwen van een stokje, dat rechtop staat, op verschillende tijden van de dag kan in verband gebracht worden met tijd, lengtes, hoeken en gelijkvormige driehoeken.
j *Topologie.* Men beschouwt dit onderwerp als een uitbreidingsmogelijkheid. Er wordt genoemd: 'binnen' en 'buiten' begrip. Möbiusband, het 2 kleurenprobleem, vergelijking torus bol, eenvoudige doorloopbaarheidsproblemen.

2.2. '*Size*'

a *Schatten van inhoud.* Bied de kinderen een stel verschillende flessen aan met gelijke inhoud; door vullen met water of zand vergelijken, na eerst geschat te hebben. Ook het ordenen van flessen met verschillende inhoud. Begrippen als 'groter dan' en 'kleiner dan' komen ter sprake. Het begrip konservatie van inhoud staat centraal.
b *Schatten van oppervlakte.* Ook hier weer staat de vorming van het begrip oppervlakte centraal alsmede het konservatiebegrip voor oppervlakte. Laat de kinderen een aantal rechthoeken van bijvoorbeeld 1×36, 2×18, 3×12 en 4×9 ordenen naar grootte zonder het woord oppervlakte te gebruiken. Geef ze daarna vier vierkanten van 6×6 en laat ze met behulp van een schaar de rechthoeken bedekken.
c *Schatten van lengtes.* Net als in a en b, maar nu met lengtes. Begin met een aantal lijnstukken van verschillende soort (gebroken, gekromd). Laat met behulp van een touwtje vergelijken. Laat ook vergelijkingen doen van figuren met gelijke omtrek, doch verschillende oppervlakte.
d *Draaiingen en hoeken.* Als de kinderen enige notie van het begrip 'hoek' hebben, kunnen ze hoeken gaan vergelijken met een eenvoudige hoekmeter, gemaakt van 2 meccanostrips. Breng het draaiingsbegrip direkt in verband met het begrip hoek.
e *Grafieken.* Toepassingen van de grootterelaties bij het lezen en maken van eenvoudige blok-, staaf-, lijngrafieken en sektordiagrammen.
f *Vergelijken van groottes.* Laat de kinderen van foto's het hoogste gebouw, de kleinste man en de verste boom aanwijzen. Op kaarten kan een kind de langste straat en de dichtstbijzijnde stad ontdekken.
g *Vergelijken met projekties.* Laat een lichtbron vlakbij en veraf van een vierkant schijnen en vergelijk de oppervlakten van de schaduwen. Bekijk de schaduw van een cirkel in het zonlicht. Vergelijk de schaduwlengtes, van paaltjes van verschillende lengte op hetzelfde tijdstip van de dag.

2.3. '*Measurement*'

a *Gebruik van geschikte maateenheid.* Deze topic is een vervolg op het schatten (zie 2.2. a, b en c). Tracht met behulp van konkreet materiaal geschikte maateenheden te vinden voor inhoud, oppervlakte en lengtematen. Denk bijvoorbeeld aan: Er gaan zoveel knikkers in die fles, etc.
b *Gebruik van standaardmaten.* Op natuurlijke wijze zal een noodzaak voor

standaardmaten moeten ontstaan, nadat eerst geschat is en met een eigen maateenheid is gemeten.
c *Meten van hoeken.* Als het werk in b begrepen is, kan met een eenvoudige eigengemaakte hoekmeter begonnen worden. Denk aan een in twaalf gelijke delen verdeelde cirkel. De noodzaak voor een nauwkeuriger meetinstrument en maateenheid zal vanzelf ontstaan. Tenslotte het begrip graad en de konventionele gradenboog invoeren.
d *Grafieken.* Als de kinderen een eerste begrip van grafieken hebben (zie 2.2. e) kunnen vele toepassingen naar aanleiding van meten gemaakt worden. Neem bijvoorbeeld de betrekking tussen omtrek en diameter van een cirkel. Ook beveelt het programma het gebruik van poolkoördinaten aan.
e *Meten bij transformaties.* Bij deze topic worden translaties, spiegelingen en rotaties bekend verondersteld en bij bepaalde transformaties meetopgaven gegeven.
Gegeven een bepaalde rotatie: meet de hoek van rotatie etc.
f *Koördinaatgrafieken.* Na d kan dit gezien worden als een formele uitbreiding naar het gebruik van koördinaten. Zowel kartesische koördinaten als poolkoördinaten. Begrippen als X- en Y-as worden geïntroduceerd.
g *Konstrukties.* Vanuit de eerder opgedane ervaringen met modellen maken, papiervouwen en knippen, zal het kind nu in staat geacht moeten worden om liniaal, 'set square', gradenboog, passer en 'parallelrulers' te gebruiken. Met behulp van deze instrumenten zal hij in staat moeten zijn om konstrukties te maken van gelijkzijdige, gelijkbenige en rechthoekige driehoeken, cirkels en cirkelsektoren, vierkanten, parallellogrammen, etc. Netwerken voor de ruimte als mogelijke uitbreiding.
h *Tekeningen op schaal.* Laat de kinderen een plattegrond van de omgeving van de school op schaal maken.
i *Inhouds- en oppervlakte-formules.* Na het voorbereidende werk over meten en standaardeenheden (2.3.e) kunnen enkele formules over oppervlakten afgeleid worden. Gebruik roosterpapier om de formule voor de rechthoek te vinden, daarna de rechthoekige driehoek, het parallellogram, etc. door de bekende afsnijdingen en aanplakkingen. Daarna wordt de inhoudsformule voor een blok afgeleid, waarna door verschillende opdelingen een formule voor de piramide verschijnt. Ook de inhoudsformules van cylinder en kegel worden 'afgeleid'.
j *Eigenschappen van de cirkel.* Eenvoudige eigenschappen van middelpunt, middellijn en straal door vouwen laten ontdekken. Door grafische vergelijking van omtrek en middellijn omtreksformule afleiden.
k *Relaties tussen oppervlaktes en lengten.* Vergelijk bijvoorbeeld de oppervlakte van een vierkant met zijn zijde. Zet de resultaten uit in een grafiek (kwadratische funktie). Bepaal nu met behulp van de grafiek vierkantswortels.
l *Meten van vormen.* Het kind moet nu in staat geacht worden vergelijkingen en werkelijke metingen tussen figuren en projekties te verrichten (zie 2.3. b).
m *Telrelaties bij veelvlakken.* Gedoeld wordt hier op de formules:
$q \cdot H = 2R = pV$ voor het regelmatige veelvlak (p, q). Dit is het regelmatige veelvlak opgebouwd uit regelmatige p-hoeken, waarvan er in elk hoekpunt q samenkomen en H, R en V respektievelijk voor het aantal hoekpunten, ribben en vlakken staan.

2.4. *Samenhang tussen topics*

We sluiten deze programmabeschrijving af met een overzicht van de samenhang tussen de topics, zoals gepubliceerd in het besproken rapport.

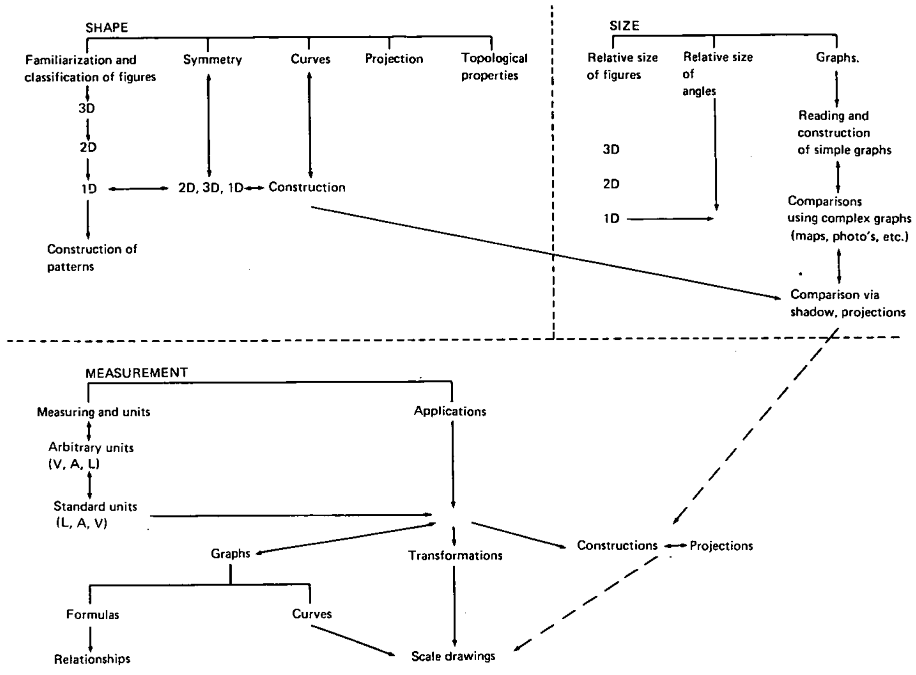


Figure 1. Geometry Topics for Stage A (Primary)

3. Aspekten van de meetkunde

In het vorige artikel (1920–heden) hebben wij gesproken over 10 aspekten die wij aan de meetkunde meenden te kunnen toekennen:

1. *Aanschouwelijk aspekt; oriëntatie in vlak en ruimte.*
Een niet te miskennen aspekt van de meetkunde, waarmee ieder mens vanaf zijn geboorte mee te maken heeft: Spelen met blokken, mozaïeken leggen, spelen met symmetrieën door middel van vouwen, knippen en kleuren. (Zie verder ook paragraaf 5).
2. *Teken- en konstruktie-aspekt*
Konstrueren hoeft niet alleen te betekenen: gebruik passer en liniaal, doch ook het maken van ruimtefiguren met behulp van rietjes, karton, papier en het maken van vlakke figuren met behulp van spijkerbord, meccano, tekendriehoek e.d. behoren tot dit aspekt.
3. *Nuttigheidsaspekt* (toepasbaarheid)
Dit kan op de basisschool vooral gevonden worden in meten, het maken

van plattegronden op schaal en vertikale en horizontale projekties van eenvoudige figuren. Het maken en lezen van grafieken, het benaderen van oppervlaktes en inhouden. Verbindingen met andere vakken, zoals aardrijkskunde; denk aan plaatsbepaling op de bol. Afstanden meten op de bol. Draaiing van de aarde en het begrip tijd. In het V.O. zijn onderwerpen uit de fysika geschikt om meetkunde mee te beginnen. Bijvoorbeeld eerst optika, dan goniometrie of eerst mechanika dan differentiaal rekening.

4. *Het logische aspekt* (deduktief systeem)
Verschillende delen van de wiskunde lenen zich zeer goed voor 'lokaal deduktief' redeneren. Door zijn ondersteunend aanschouwelijk karakter is juist de meetkunde hiervoor bijzonder geschikt, ook op een eenvoudig nivo. Denk aan eenvoudige redeneringen op induktief nivo bij doorloopbaarheidsproblemen van grafen. Of neem een stukje deduktief redeneren op grond van alleen de driehoeksongelijkheid.

5. *Het struktuuraspekt* (kongruentietransformaties)
Dit aspekt kan pas aan de orde komen als de leerlingen zich eerst de specifieke moeilijkheden van de 'eenvoudige' voorbeelden hebben eigen gemaakt. De struktuur van de meetkunde kan pas zichtbaar worden als men de delen beheerst vanuit het voorbeeld naar het algemene en niet andersom. Dit aspekt zal o.i. niet voorkomen in het basisschoolprogramma en wellicht ook nog niet in de eerste klassen van het V.O..

6. *Het algebraïsch aspekt*
Voor het V.O. spreekt dit voor zichzelf: berekeningen van lengten, hoeken, etc., grafieken van funkties, analytische- en vektormeetkunde. Doch ook op basisschoolnivo is hier al een en ander te doen. Men denke aan eenvoudige lineaire programmeringsproblemen, waarbij ongelijkheden als bijvoorbeeld $x + y < 6$; $x, y \in \mathbb{N}$ dienen te worden opgelost. Dit zal voornamelijk pas in de hoogste klassen van het basisonderwijs en de brugklas gedaan kunnen worden.

7. *Het reken- en meetaspekt*
Meten is het begin van de meetkunde geweest en behoort een belangrijk onderdeel van het basisschoolpakket uit te maken. Schatten, geschikte eenheden kiezen, rekenen met deze eenheden, direkte en indirekte meetstrategieën behoren alle tot dit aspekt (zie hiervoor bijvoorbeeld het Ontario-programma).

8. *Taal- en relatie-aspekt*
Begrippen als 'liggen op', 'gaan door', 'binnen', 'buiten', 'is even lang als', 'is groter dan', 'is van dezelfde vorm als', kunnen intuïtief aangeleerd worden. Men denke aan het machtige meetkundige hulpmiddel van de getallenlijn, waarop vele wiskundige relaties meetkundig vertaald kunnen worden.

9. *Het kombinatorische aspekt*
Niet alleen komen in de meetkunde vele kombinatorische problemen voor, waaraan 'handig tellen' geoefend kan worden, zoals tel het aantal diagonalen van een vijfhoek, doch ook zijn er meetkundige modellen die dit handig tellen ondersteunen, zoals het boomdiagram, het wegenmodel en het roostermodel. Reeds verschillende malen is aangetoond, dat dit

door 8–9-jarigen gehanteerd soms zelfs ontdekt kan worden.

10. *Topologisch aspekt*
Eenvoudige topologische problemen zijn geschikt om bepaalde logische uitspraken en lokale deduktieve redeneringen aan te leren of te demonstreren, zoals bijvoorbeeld de formule van Euler, de doorloopbaarheid van grafen en het tweekleurenprobleem. Belangrijke matematische vaardigheden als het dualiteitsprincipe kunnen voorbereid worden.

Tenslottte nog een overzicht met enkele voorbeelden per aspekt, de voorbereidende waarde van ieder aspekt en de relaties met de andere aspekten van de meetkunde, meer in het algemeen met die van de wiskunde en andere vakken.

4. Meetkunde op de basisschool

Uit de paragrafen 2 en 3 is al duidelijk geworden, dat bij meetkunde op de basisschool niet gedacht moet worden aan de traditionele opvatting dat meetkunde als voorbeeld voor een deduktief systeem zou moeten staan. Juist de ontkoppeling van de klassiek aksiomatische metode en de meetkunde speelt bij moderne opvattingen van wiskunde leren een belangrijke rol. Naast te leren vaardigheden kan men een goede feeling ontwikkelen om tot de kern door te dringen van op zichzelf staande problemen ('topics'), die niet in een keurig geordende reeks van definities en stellingen staan. Juist de meetkunde lijkt hiertoe een bijzonder geschikt leerstofgebied te zijn. Nemen we als voorbeeld eens het afstandsbegrip, dat meestal zeer formeel wordt ingevoerd. Dit begrip dient afhankelijk van de ruimte waar men in werkt, telkens opnieuw geformuleerd te worden

Het is echter steeds gebaseerd op een intuïtief begrijpelijke en vanzelfsprekende afspraak. Dit nu kan goed voorbereid worden door het afstandsbegrip ter sprake te brengen in het platte vlak, op de bol, op een kegel, op een cylinder. Begin met werkelijke metingen met behulp van touwtjes of elastiekjes en tracht daaruit konklusies te trekken, die niet direkt in formele bewoordingen behoeven te worden vastgelegd. Door ook binnen een geheel andere verzameling – bijvoorbeeld die van de roosterpunten in het X–Y-vlak – het afstandsbegrip te behandelen, zal een fleksibeler houding ten opzichte van wiskunde leren kunnen ontstaan.

De meer alerte houding ten opzichte van wiskunde en wiskunde leren, die ook bij volwassenen waar te nemen is als zij ontdekken, dat een cirkel binnen laatstgenoemde verzameling een geheel ander beeld heeft dan de euclidische cirkel, doet vermoeden, dat juist dergelijke opgaven uitermate geschikt zijn om het leerproces in de wiskunde op gang te brengen.

De psycholoog '*Bruner*' spreekt in zijn teorie van het leren over drie fasen: 'enactive' (handelend) – 'ikonic' (beeldend) – 'symbolic' (abstrakt), die vooral op de meetkunde van toepassing lijken te zijn. We geven een voorbeeld: '*Enactive*': Biedt een kind een verzameling plastik driehoeken aan van twee soorten: gelijkzijdige en rechthoekig gelijkzijdige, die zulke afmetingen hebben, dat de rechthoekszijden dezelfde lengten hebben als de zijden van de gelijkzijdige driehoeken. Geeft het kind de opdracht er 'sluitende' patronen mee te

ASPEKT	VOORBEELDEN VOOR HET BASISONDERWIJS	VOORBEREIDEND OP	VERBINDINGEN MET
① *Oriëntatie in vlak en ruimte*	a) Geef de leerlingen een verzameling blokken (rechte blokken, piramides, cylinders, bol, halve bol . . .). Welke blokken hebben vlakke zijkanten, welke gebogen? Hoeveel ribben? Hoeveel hoekpunten? Welke kunnen staan, welke niet? . . . Etc. b) Met eenvoudige meetkundige figuren mozaïeken leggen. Herkennen en benoemen van figuren en begrippen. c) Situaties herkennen naar aanleiding van foto's en tekeningen.	Alle overige aspekten in het bijzonder symmetrie.	spelsituaties, leven van alledag, taalgebruik
② *Construkties en tekenen*	a) Figuren maken op het spijkerbord, die aan bepaalde eisen voldoen, deze daarna overnemen op roosterpapier. b) Ruimtemodellen maken van rietjes, karton. c) Tekenen van figuren met behulp van liniaal, tekendriehoek, passer, gradenboog, touwtjes en punaises, etc. d) Tekenen in parallelprojektie, tekenen in perspektief. e) Schaduwen tekenen.	eigenschappen van ruimte en vlakke figuren, het maken van goede tekeningen, nodige voorwaarden bij konstrukties, vervormingen, gelijkvormigheid, symmetrie.	tekenen kaarten en plattegronden. gebruik van bepaald tekengerei
③ *Nut*	a) Grafieken maken, lezen en toepassen. b) Toepassingen bij allerlei meetprocedures (hoeken, lengten, oppervlaktes, inhouden, snelheden meten). c) Instrumenten (hoekmeter, hoogtemeter, windroos, kompas, schuifmaat, mikrometer) leren kennen en begrijpen. d) Plattegronden en werktekeningen lezen.	praktisch handelen	leven van alledag aardrijkskunde natuurkunde biologie
④ *Logika*	a) Waarom wordt de 'roostercirkel' in de roostermeetkunde voorgesteld door een vierkant? b) Waarom heb je bij het volleggen van het platte vlak met zeshoeken *drie* kleuren nodig om de vloer afwisselend te kleuren? c) Eenvoudige induktieve redenaties bij doorloopbaarheidsproblemen. d) Eenvoudige gevolgtrekkingen. Uit een tegelvloer met driehoeken zien dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is.	deduceren, analogie redeneringen, generaliseren, abstraheren,	taal

⑤ *Struktuur*			
⑥ *Algebra*	a) Ongelijkheden oplossen met behulp van getallenlijn b) Eenvoudige lineaire programmeringsproblemen	het begrip: variabele	rekenen
⑦ *Meten en rekenen*	a) Meten met een geschikte maat, daarna komen tot standaardmaten. Verfijnen en tot kommagetallen geraken b) Gebruik van grafieken bij meten	kommagetallen, grote, kleine getallen, eenhedenstelsels,	leven van alledag natuurkunde biologie rekenen
⑧ *Taal en relaties*	a) Relaties in een pijlendiagram weergeven b) Relaties in een rooster weergeven c) Het juiste gebruik van relaties als 'ligt op', 'gaat door', etc. d) Laat een leerling een figuur beschrijven, die een andere moet tekenen zonder de figuur te zien	afbeeldingen, funkties en grafieken, eksakt taalgebruik, (definiëren), symboliseren, ordenen	taal, in het bijzonder symbolentaal
⑨ *Kombinatoriek*	a) Boomdiagram ( ), wegenmodel ( ) en roostermodel ( ), als meetkundige visualiseringen ontdekken b) Kombinatorische problemen als: Vind alle pentomino's	visualiseren, isomorfieën ontdekken, systematisch werken	rekenen
⑩ *Topologie*	a) Waarom kan een doorloopbaar netwerk nooit meer dan 2 oneven knooppunten bevatten? b) Laat het netwerk van een achtvlak doorlopen en daarna de zijvlakken van een kubus. Wat merk je op?	induktie, deduktie, dualiteitsprincipe, matrices	logika

leggen. Al handelend zal het het verschil opmerken tussen de twee soorten driehoeken. Voor de goede orde zij opgemerkt, dat 5–6-jarigen in het algemeen het verschil tussen deze driehoeken niet opmerken.
'*Ikonic*': Als de handelende fase voorbij is, zal het 'beeld' van de driehoeken herkend worden aan getekende figuren.
'*Symbolic*': Als hoogste nivo zal het kind uiteindelijk geen beeld meer nodig hebben om zich het verschil tussen de twee genoemde driehoeken voor te stellen en kan dit wellicht zelfs onder woorden brengen. Het hoeft geen betoog, dat dit soort aktiviteiten bij het basisonderwijs thuishoren.
Omdat veel al handelend, tekenend, konstruerend en plakkend gedaan kan worden, kan het onderwijsleerproces een levendig, kreatief karakter krijgen. Vele meetkundige problemen kunnen ook gekoppeld worden aan reële situaties en hebben daarom een stimulerende invloed op de houding van leerling en onderwijzer.

Vergelijken we de eerder genoemde aspekten van de meetkunde met het Ontarioprogramma, dan merken we op, dat binnen dit programma een sterke nadruk ligt op de aspekten:
① (oriëntatie) ②(konstrukties) ③(nuttigheid)(binnen de wiskunde: grafieken) en ⑦ meten, terwijl het aspekt ⑤ (struktuur) voorbereid wordt door al konstruerend de transformaties in te leiden en het aspekt (topologie) als mogelijke uitbreiding wordt gezien.
Over 'bewijzen' wordt in verband met aspekt ④ (logika) niet gesproken. Het taalaspekt ⑧ komt niet ekspliciet naar voren en het kombinatorische aspekt ⑨ wordt kennelijk niet als een meetkundige aktiviteit gezien.

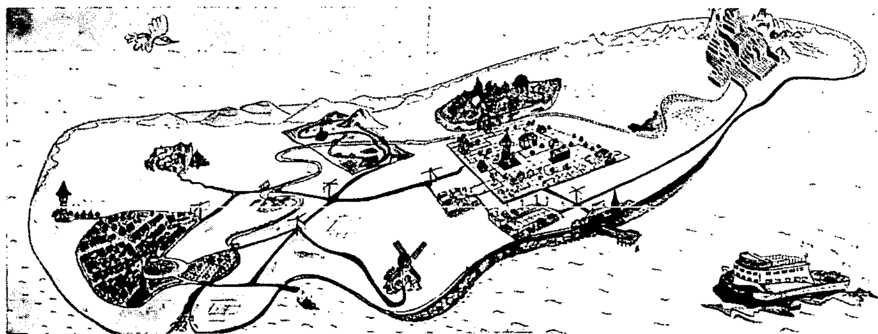
Nadat in 1889 in Nederland het vak 'vormleer' uit het basisschoolprogramma was verwijderd, leek de meetkunde meer dan ooit bestemd voor het voortgezet onderwijs en sel als specimen van een deduktieve wetenschap. Het basisschoolprogramma richtte zich in het algemeen geheel en al op 'rekenen' en zo er al enige meetkunde in voorkwam, dan was dit het louter benoemen van enige vlakke figuren (driehoek, vierkant, rechthoek, parallellogram, trapezium, cirkel) met de bijbehorende formules voor de oppervlakte van deze figuren en enkele eenvoudige stereometrische figuren (kubus, recht blok en cylinder).
Nu sinds enige jaren ook de modernisering van het rekenonderwijs op gang is gekomen, zien wij in de leerboeken meer meetkunde verschijnen. Afhankelijk van de beïnvloeding van de auteurs door de buitenlandse stromingen, krijgen verschillende aspekten een zwaarder aksent. In de Angelsaksische landen wordt veelal de empirische stroming gekozen van handelend leren, met de nadruk op handelend, zodat veel gemeten en gekonstrueerd wordt. In Frankrijk en België wordt meer de logisch-deduktieve stroming gevolgd, zodat al van het begin af aan topologische begrippen en formele redeneringen worden gehanteerd.
In vrijwel alle nieuwere leerboeken voor het basisonderwijs wordt de laatste jaren wat aan grafieken en meten gedaan. De leergangen, die een bewerking van een angelsaksisch leerboek zijn, leggen aksenten op het meet- en

konstruktie-aspekt. terwijl de bewerkingen van franse metoden het aksent leggen op logika, relaties en topologie.

Vanaf augustus 1971 wordt in Nederland door een groep onderwijzers, wiskundedidaktici van de Pedagogische Akademies, onderwijskundigen, wiskundeleraren en hoogleraren aan de ontwikkeling van een nieuw leerplan voor wiskunde op de basisschool gewerkt in een prokekt genaamd WISKOBAS, dat is ondergebracht bij het I.O.W.O. (Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs).
In 1975 zullen de eerste publikaties verschijnen en in een uitgewerkt schoolwerkplan (een draaiboek voor de onderwijspraktijk) zullen ook meetkundige bijdragen te vinden zijn. Hierin zullen o.a. onderwerpen als meten, grafieken, koördinaten, werken met het spijkerbord en de kubus, verbindingen met aardrijkskunde (de bol) voorkomen.
Om een wat duidelijker idee te krijgen dan men kan gissen uit deze globale omschrijvingen, geven wij in de volgende paragraaf een voorbeeld (slechts één in verband met de beschikbare ruimte) van een mogelijke meetkundige aktiviteit voor de eerste klas van de basisschool. De te beschrijven aktiviteit is gecentreerd rond het aspekt van de ruimtelijke oriëntatie.

5. **Voorbeeld van een meetkunde-les** (klas 1, basisschool)

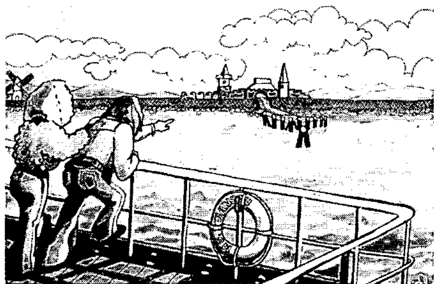
Het volgende behoort tot het nog te publiceren Integratieplan van WISKOBAS. De lessen zijn ontworpen door *Jan van den Brink* die over dit eksperiment heeft geschreven in het Wiskobas-Bulletin.[5]
Mogen wij er nog eens op wijzen, dat dit slechts een paar voorbeeldjes zijn van de stukken meetkunde, die in het programma verwerkt zijn; dat de hier beschreven aktiviteiten tot een projekt behoren; dat er ook binnen het IOWO nog geen konsensus bestaat ten aanzien van de problematiek van het aanvankelijk meetkunde-onderwijs.
Het projekt WATERLAND (zie afb. 1), dat in november van het eerste leerjaar uitgevoerd wordt, handelt over een denkbeeldig eiland, waar heel wat wiskunde te beleven valt. Tijdens de inleidende lessen wordt de aandacht



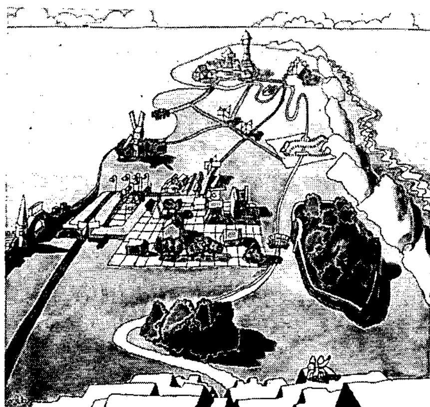
afb. 1

gevestigd op het waarnemen van details, verhoudingen, ruimtelijke oriëntatie en het symboliseren van routes. Er worden maquettes van gedeelten van Waterland nagebouwd, waarbij een eerste kennismaking met het oppervlaktebegrip, koördinaten, meten en telproblemen aan de orde komen. Daarna volgen ruimtelijk oriënteren, waarover dadelijk meer in detail, het symboliseren van situaties, optimaliseren, parkeren en rangeren en doolhofproblemen. Het projekt wordt afgesloten met een aantal autobusproblemen (bij elke halte stappen mensen in en uit), die een louter rekenkundig karakter hebben.

Het begrip ruimtelijke oriëntatie wordt nogal verschillend geïnterpreteerd. Soms wordt er onder verstaan de begrippen 'voor', 'achter', 'boven', 'onder', 'links', 'rechts', 'verder', etc. te kunnen hanteren. Dat hier echter veel meer over te zeggen valt, moge uit het volgende blijken.
De kinderen kregen een 'foto-album' van een vakantietocht op Waterland en er werden verschillende vragen gesteld over deze 'foto's'.
De kernvraag was steeds: 'Waar is deze 'foto' genomen?' Zo kozen sommige kinderen bij de 'foto' van afb. 2 nog al eens de linkse steiger op de grote waterlandplaat, die voor de klas hing. Door vragen te stellen als: 'Als het die steiger is, waar moet die molen dan staan?', merkten de kinderen de relaties tussen de verschillende objekten op. Toen de hoogte, van waaraf de 'foto' genomen was, in het geding kwam, traden er moeilijkheden op (afb. 3).



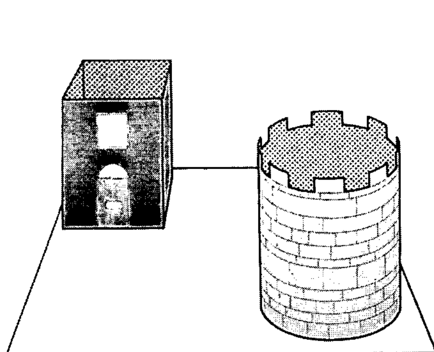
afb. 2



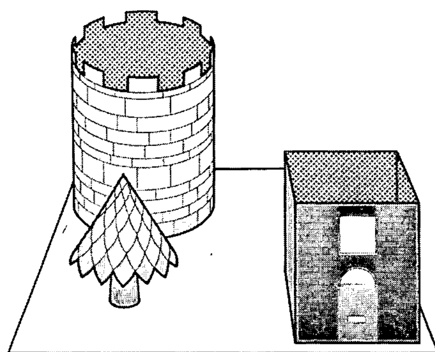
afb. 3

Dit gaf aanleiding tot het maken van een serie echte foto's van de school, vanaf verschillende etages van een flatgebouw genomen, waarbij dezelfde problemen aan de orde kwamen. Verder werden vragen gesteld als:
'Waar staat deze wegwijzer?' en de omkering 'Waar moet je deze wegwijzer plaatsen?'
Aan de hand van een volgorde van 'foto's' diende een fietstocht beschreven te worden. De kinderen moesten dus ordenen en symboliseren via een soort routekaart als in trams en bussen is te vinden.
Het bleek, dat sommige foto's van Waterland moeilijkheden gaven, omdat ze vanuit een andere richting genomen waren dan de grote waterlandplaat

zelf (afb. 1). Een voorbeeld van een dergelijke verwarring ziet U in de afbeeldingen 4 en 5, die wij ontlenen aan het Nuffieldprojekt.
Het is nog de vraag of deze problemen betreffende 'ruimtelijk oriënteren' wel in deze volgorde gebracht moeten worden. Nu verliep de volgorde: het fiktieve eiland, de maquette, de echte foto's rondom de school.
Ook gaven de 'foto's' aanleiding tot het 'vergelijken' van grootheden op één 'foto'. De juf legde een kwartje op de overheadprojektor en vroeg de kinderen, wijzend op het scherm, welk geldstuk het was. Door andere muntstukken te nemen en op de overheadprojektor te leggen, konden de kinderen aan de grootte ontdekken dat het een kwartje was.



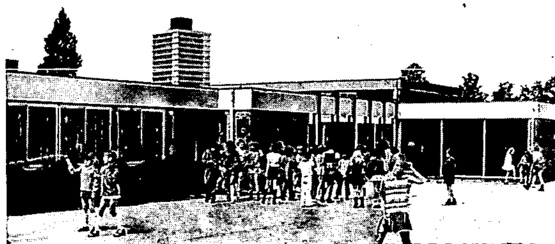
afb. 4



afb. 5

Een laatste voorbeeld over oriënteren is de opdracht naar aanleiding van de serie foto's uit afb. 6.









afb. 6

De opdracht luidde:
Welke foto is het dichtst bij de deur genomen? En welke daarna? etc. Een leerling wees op de flat, die boven het dak van de school uitstak en zei: 'De flat wordt kleiner als je dichterbij de school komt, want de school wordt groter'. Hij telde de balkonnetjes om zeker te zijn: 'Daar zie je meer balkonnetjes, dus je staat verderweg van de school'.

Op dit soort problemen zijn nog legio voortzettingen en variaties te bedenken, die o.i. voorbeelden zijn wat werkelijk ruimtelijke oriëntatie betekent en die gerekend dienen te worden tot de beginaktiviteiten van de meetkunde.

6. Een standpunt

We zijn thans aan het einde van onze reeks artikelen over het aanvankelijk meetkunde-onderwijs. Wij hebben in vorige artikelen laten zien hoe de traditionele meetkunde, die binnen het onderwijs jarenlang model heeft gestaan voor 'het' deduktief systeem, bij de laatste leerplanherziening geheel uit het voortgezet onderwijs is verdwenen. De afbeeldingsmeetkunde is er voor in de plaats gekomen, die onze leerlingen sneller naar het struktuurelement van de wiskunde moet leiden. Bij de vektormeetkunde kunnen we – behalve het algebraïsch aspekt – nauwelijks andere aspekten ontdekken. Dat de traditionele meetkunde uit het leerplan is verdwenen, is velen niet onwelgevallig. Het feit, dat leerlingen van 12 jaar niet in staat blijken te zijn de aksiomatische metode te volgen, is in ieder geval in de praktijk ruimschoots aange-

toond. De eindeloze vraagstukkenvariaties over een bepaald planimetrisch onderwerp hebben slechts weinig leerlingen en docenten gelukkig gemaakt en de herinnering aan de stereometrie zal niet voor ieder een zoete zijn.
Thans lijkt er belangstelling voor meetkunde te ontstaan bij het basisonderwijs. Wel dient meetkunde dan ruimer geïnterpreteerd te worden dan tot voor kort de gewoonte was, toen eigenlijk alleen het logische en het konstruktie-aspekt aandacht kregen. In het voorgaande hebben wij aan deze twee aspekten nog een achttal andere toegevoegd. Een aantal, dat wellicht nog uitgebreid kan worden, misschien door anderen weer beknot zou willen worden. Uit de beschrijving en toelichting op deze aspekten moge duidelijk geworden zijn, dat we een hernieuwde belangstelling zouden toejuichen, maar dan wel in de ruimere zin en waar mogelijk verschoven naar het basisonderwijs en brugklas en in 'topics' aangeboden.
Door het handelende karakter, dat aan vele voor het basisonderwijs beschreven onderwerpen inherent is, kan het vak eén voorbeeld van het principe 'learning by doing' zijn. Kinderen en onderwijzers kunnen in het onderwijs kreatief bezig zijn, terwijl een spontane differentiatie bij het oplossen van problemen kan optreden. Het plezier in het leren en leiding geven bij het leren zal hierbij stimulerend kunnen werken op het gehele onderwijsleerproces.
Behalve in meetkundige onderwerpen rond kleine topics, die soms een wat abstrakt karakter kunnen hebben, kan meetkunde bedreven worden naar aanleiding van projekten rond een niet-meetkundig onderwerp. Men denke bijvoorbeeld aan een projekt rond de aarde, waarbij de begrippen tijd, snelheid, afstand, aanleiding geven tot meetkundige aktiviteiten. (Hieraan zal *Streefland* nog een artikel wijden.)
We overdrijven niet als we stellen dat de meetkunde de laatste jaren wat stiefmoederlijk is behandeld. De moderne opvattingen over wiskunde en wiskunde leren zullen hieraan niet vreemd zijn. Fervente aanhangers van het 'strukturalisme' (verzamelingenleer, logika, afbeeldingen, relaties) zullen ongaarne teruggrijpen naar de 'oude' meetkunde. Het feit, dat nieuwe vakken als bijvoorbeeld komputerkunde de aandacht eisen, zal dit ook niet gemakkelijk maken.
Toch is meetkunde overal. We leven op een bol, we leven in de driedimensionale ruimte, we zien de ganse dag geometrische figuren om ons heen en stellen ons bij elk abstrakt probleem iets konkreet meetkundigs voor. (De Grieken hadden een rekenkunde, die geheel geometrisch was.) Het aspekt van de ruimtelijke oriëntatie en de samenhang met ons dagelijks leven, is gedemonstreerd aan het gegeven voorbeeld van de lessen naar aanleiding van de foto's (zie par. 5).
Door de meetkunde aldus te benaderen, kan hier een waarde van uitgaan, die belangrijk is voor de vorming van belangrijke meetkundige en wiskundige begrippen. *Arthur Engel* gebruikt bij zijn leergang waarschijnlijkheidsrekening 'bomen' om kansen en verwachtingen te berekenen!
Het meetkundige hulpmiddel, dat hij hierbij gebruikt is een goed voorbeeld hoe visualiseringen in wiskundige problemen van dienst kunnen zijn.
Het visualiseren door middel van meetkundige modellen is een niet weg te denken element van de wiskunde.
Als je een leergang ontwerpt over hoeken en bogen in een cirkel is er binnen

dit onderwerp streng deduktief redeneren haalbaar, dat visueel overzichtelijk is en zinvol is. We hebben dit eerder lokaal deduktief redeneren genoemd. De opbouw van een 'geheel' (deduktief systeem) kan overgelaten worden aan wiskunde-specialisten.

Problem-solving wordt soms gezien als een apart leerstofvlak van de wiskunde. Verstaan we hieronder het aanpakgedrag bij de problemen, die niet direkt met bekende routines opgelost kunnen worden, dan lijken verschillende meetkundige onderwerpen hiervoor geschikt. Men zie bijvoorbeeld de verzameling problemen van *Engel*, die hij publiceerde in the Educational Studies.[6]

Tenslotte mag het estetische element, dat ons de meetkunde biedt, niet onderschat worden. Hoewel dit enigszins etisch moge klinken, menen wij toch, dat men kinderen (en volwassenen) hierin kan en moet opvoeden en dan zijn we natuurlijk weer dicht bij het argument van de vormende waarde, waarover vijftig jaar geleden reeds zoveel is gezegd.

7. Samenvatting

Meetkunde hoorde tot voor kort tot het domein van het voortgezette onderwijs. Het werd vooral geassocieerd met Euclides en gezien als hèt voorbeeld van een deduktief systeem. Op basisschoolnivo lagen er hier en daar enkele restjes van de vormleer, zoals die ruim een eeuw geleden gepraktiseerd werd en nog wat leerstofblokjes, die we nu tot het leerstofvlak meten zouden rekenen, zoals het berekenen van de omtrek, oppervlakte en inhoud van meetkundige objekten. Maar vanaf de vijftiger jaren steeg de belangstelling voor meetkunde op de basisschool bijna even snel als het entoesiasme voor de euclidische meetkunde bij het voortgezette onderwijs daalde. Zo bevatte 'The Arithmetic Teacher' in de periode van 1954 tot 1959 geen enkel meetkunde-artikel, in de vijf volgende jaren vijf verhandelingen per jaargang, vervolgens tien en in de periode 1968–1973 zelfs vijftien stukjes per jaar. Er bestaat echter internationaal gezien opvallend weinig overeenstemming over een meetkundeprogramma voor het basisonderwijs. Wellicht is dit toe te schrijven aan de rijkdom van het gebied: de meetkunde bevat tal van aspekten, die moeilijk in een vertikaal gepland leerstofprogramma gevat kunnen worden.

Meetkundige aktiviteiten worden vooral aangeprezen vanwege hun uitnodigend karakter, de aanschouwelijke basis die ze verschaffen voor de matematische aktiviteiten en de mogelijkheden die ze hebben voor een steeds verdergaande wiskundige organisatie van het gebied.

Noten

1 Brydegaard, M. en Inskeep, J.
Readings in Geometry from the 'Arithmetic Teacher' N.C.T.M. (1970)
2 Treffers, A. en Moor, E. de
Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs 1 en 2. Euclides 50, 1 en 2.
3 Treffers, A.
'maTEMAtika', handboek heroriëntering onderwijzer, hoofdstukken 1 en 2. uitgave I.O.W.O. (1973)
4 The Ontario Institute for Studies in Education
GEOMETRY (Kindergarten to grade thirteen). 1967

5 Brink, J. van den
'*Kieken*' Wiskobas-Bulletin jaargang 4 nr. 1 (1974)
6 Engel, A.
'*Geometrical Activities for the upper Elementary School*'. 'Educational Studies in Mathematics' Jaargang 3.(1971)

EUCLIDES

Redactieverslag – Jaargang 49 – 1973/1974

Aan de besturen van
de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
en de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.

De inhoud van deze jaargang geeft weinig aanleiding tot opmerkingen. De diverse aspecten kwamen in ongeveer dezelfde verhouding aan bod als in de vorige jaargang.
Vermeldenswaard is de verschijning van het speciale themanummer gewijd aan statistiek en kansrekening. De redactie vindt, dat themanummers eigenlijk vaker dienen te verschijnen. Zij vraagt zich evenwel af of dit mogelijk is, daar deze nummers een veel intensere voorbereiding vergen dan zij er tot nu toe aan heeft kunnen geven.
Ook in het afgelopen jaar heeft de redactie gepoogd het blad actueel te doen zijn. Doch de tijd nodig tussen inleveren van de kopij en verschijnen van het blad is vaak zo groot, dat al gauw aan actualiteit wordt ingeboet. Het probleem blijft bij de redactie in studie.
Binnen de redactie zijn enige veranderingen opgetreden. Drs. A. M. Koldijk legde in het begin van deze jaargang het redactiesecretariaat neer. Hij werd daarin opgevolgd door de heer W. Kleijne. Bovendien werd de heer P. Th. Sanders in de redactie opgenomen.
De samenwerking met de uitgever was ook dit jaar voortreffelijk. Enige onregelmatigheden in de druk waren helaas niet te voorkomen, wegens verandering van drukprocédé.

september 1974

G. Krooshof, voorzitter
W. Kleijne, secretaris

Machientjes

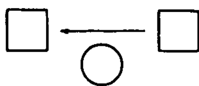
J. J. M. OERLEMANS
Dongen

Inleiding

Als leraar aan een P.A. maak ik kennis met allerlei pogingen het rekenonderwijs op de basisschool te verlevendigen en te moderniseren. Bij het inventariseren van modellen, gebruikt bij het aanleren van de verschillende operaties met natuurlijke getallen, ontmoet men soms (dit is in wiskundig georiënteerde methoden) het z.g. *operatormodel.* Aangezien dit model m.i. ook goed bruikbaar is om fundamentele wiskundige begrippen als afbeelding, operatie, structuur, groep aan te demonstreren, wijd ik dit artikel aan het bekendste voorbeeld van het operatormodel: de z.g. machientjes.

Par. 1

* De term machientjes is niets anders dan een beter aansprekend woord voor afbeeldingen. Je stopt iets in een machientje (input), iets dat er in past (je gaat ook geen dubbeltjes stoppen in een automaat die werkt op kwartjes). Het machientje (operator) doet zijn werk en er komt iets uit (output). Schematisch:



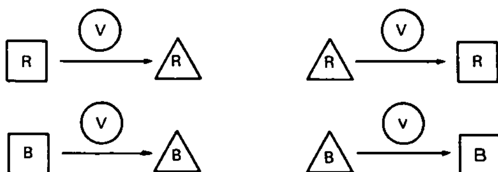
input-operator-output

We beginnen dus met te vertellen, waarop de in deze paragraaf te behandelen machientjes werken. Dat zijn de volgende 4 logiblokken:
een rood en een blauw vierkant,
een rode en een blauwe driehoek, aan te duiden als:



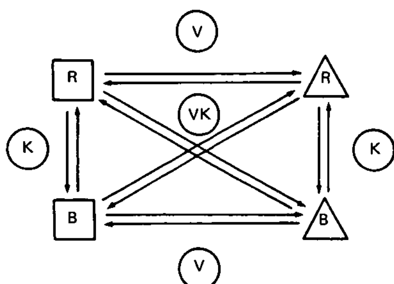
Opmerking: Logiblokken zijn in verschillende uitvoeringen op de markt. Aantal 48, variërend in kleur (rood, geel, blauw), vorm (vierkant, rond, rechthoekig, driehoekig), grootte (groot, klein), en dikte (dik, dun). De gekozen logiblokken zijn alle groot en dik.

* We bedenken machientjes die de elementen van de gekozen verzameling van 4 logiblokken omzetten in andere logiblokken van de verzameling:
- een machientje verandert de VORM en bewaart de kleur: (v)



- een machientje verandert de KLEUR en bewaart de vorm: (K)
- een machientje verandert de VORM en de KLEUR: (VK)

Het volgende schema leert, dat we alle mogelijke omzettingen hebben:

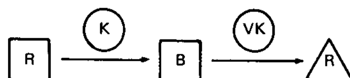


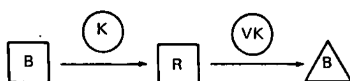
* *Samenstelling* van 2 machientjes:

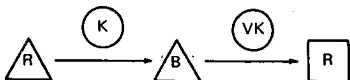
We laten nu 2 verschillende machientjes na elkaar werken, bijv. (VK) achter (K).
Die koppeling, samenstelling genoemd, wordt ook als volgt genoteerd:

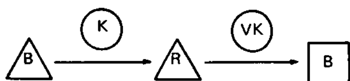
(K) o (VK) (eerst (K), dan (VK)).

We werken dit voorbeeld verder uit:









Gelet op het resultaat is (K) o (VK) dus *gelijkwaardig* met (V).
(Je kunt je een machientje of een ketting, d.i. samenstelling van machientjes voorstellen als een ondoorzichtige kast, een black box.)
Zij doen met alle blokken precies hetzelfde. Anders gezegd:
 maakt uit 2 machientjes één machientje.
Stellen we twee verschillende machientjes samen, dan vinden we het derde:

(K) o (V) = (V) o (K) = (VK)

(K) o (VK) = (VK) o (K) = (V)

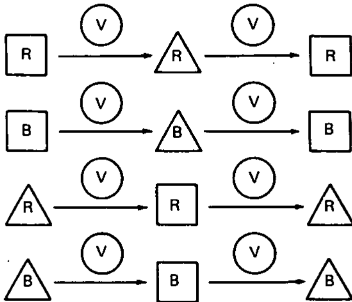
(V) o (VK) = (VK) o (V) = (K)

De resultaten kunnen in een samenstellingstabel worden weergegeven:

dan:

o	V	K	VK
V	-	VK	K
eerst K	VK	-	V
VK	K	V	-

In de tabel ontbreken nog de samenstellingen van 2 gelijke machientjes. We pro-beren: (V) ∘ (V).



Uit het machientje (V) ∘ (V) komt precies hetzelfde logiblok als je er in stopt. Hiervoor moeten we een nieuw machientje maken: één, dat niets verandert: (NIKS). Voegen we het NIKS-machientje aan ons machinepark toe, dan kunnen we nu een volledige samenstellingstabel vervaardigen:

dan:

o	NIKS	V	K	VK
NIKS	NIKS	V	K	VK
eerst V	V	NIKS	VK	K
K	K	VK	NIKS	V
VK	VK	K	V	NIKS

* We zien:

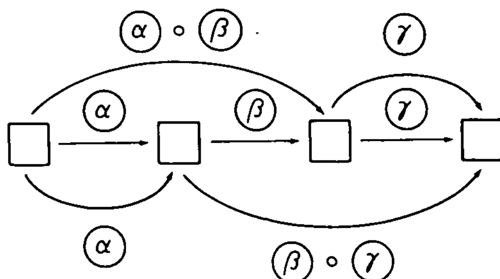
1 Door samenstelling van gelijke en/of verschillende machientjes vindt men een bekend machientje. We komen niet buiten de verzameling.
In wiskundige termen: de verzameling M = {(NIKS), (V), (K), (VK)} is *gesloten* onder de operatie samenstellen.

2 Als (α) en (β) twee willekeurige machientjes uit M voorstellen, dan is steeds: $(\alpha) \circ (\beta) = (\beta) \circ (\alpha)$
We zeggen: de samenstelling in M is *commutatief.*

3 Als (α) een machientje is uit M, dan geldt: $(\alpha) \circ (\text{NIKS}) = (\text{NIKS}) \circ (\alpha) = (\alpha)$
(NIKS) is *neutraal element* voor de samenstelling in M.

4 Bij elk machientje van onze verzameling is er een machientje, dat de werking van het eerste teniet doet:
Als (α) een machientje uit M is, dan is er een machientje (β) uit M, zo, dat $(\alpha) \circ (\beta) = (\beta) \circ (\alpha) = (\text{NIKS})$
We noemen twee van zulke machientjes elkaars *inverse.*

5 Het is niet moeilijk in te zien, dat als (α), (β), (γ), machientjes uit M voorstellen $((\alpha) \circ (\beta)) \circ (\gamma) = (\alpha) \circ ((\beta) \circ (\gamma))$
Het volgende plaatje moge dit illustreren:



We zeggen: de samenstelling is *associatief* in M.
Het plaatje doet het vermoeden rijzen, dat de samenstelling in elk machinepark associatief is.

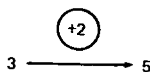
Conclusie: De verzameling M met als operatie samenstellen is een *groep,* d.w.z.:
- M is gesloten onder de samenstelling
- De samenstelling is associatief
- Er is een neutraal element
- Elk element heeft een inverse

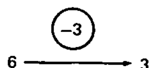
Aangezien de samenstelling ook nog commutatief is, heet M een *commutatieve groep.*

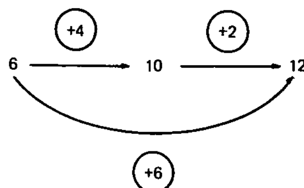
Par. 2

We bekijken nu machientjes, die iets doen met getallen.

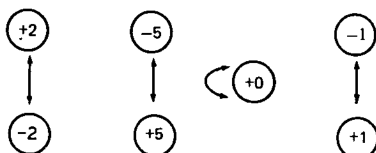
A We kennen op de eerste plaats de z.g. optel- en aftrekmachientjes.
Het getal, dat erbijgeteld of erafgetrokken wordt, is steeds een niet-negatief geheel getal.
Voorbeelden:



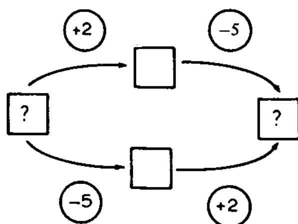




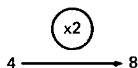
Samenstelling: (+2) ∘ (−5) = (−3)
(Interessant hierbij is de vergelijking met het werken met gehele getallen:
$(+2) + (-5) = (-3)$.)
Dit machinepark met als operatie de samenstelling vormt weer een commutatieve groep:
1 Een ketting van twee machientjes kan steeds vervangen worden door een machientje uit de verzameling.
2 De samenstelling is associatief.
3 Het neutrale element is (+0). Je kunt het ook (−0) noemen.
4 Elk machientje heeft een inverse:



5 De samenstelling is commutatief. Voorbeeld:



B Een tweede verzameling machientjes, die iets met getallen doet, wordt gevormd door de vermenigvuldig- en deelmachientjes. We vermenigvuldigen en delen slechts met/door natuurlijke getallen. (Delen door 0 is immers verboden.) Voorbeelden:



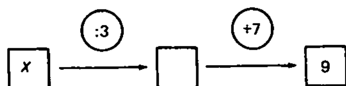


Het is niet moeilijk aan te tonen, dat deze verzameling machientjes met de samenstelling géén groep is.

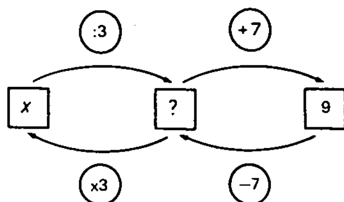
Slotopmerking: De in paragraaf 2 genoemde machientjes lijken bruikbaar bij de behandeling van lineaire vergelijkingen met een onbekende.
Voorbeeld:

Los op: $\frac{1}{3}x + 7 = 9$

Plaatje:



Oplossing:



Inverse van (+7) is (−7)
Inverse van (:3) is (x3)

[?] = 9 − 7 = 2 [x] = 2 x 3 = 6

Wintersymposium Wiskundig Genootschap.

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op zaterdag **4 januari 1975** in het gebouw van het Sint Janslyceum, Sweelinckplein 3 te 's-Hertogenbosch. Als thema is gekozen: 'Numerieke wiskunde en informatica'.
Het programma luidt als volgt:

10.00–10.30 u. Aankomst en koffie.
10.30–11.30 u. Prof. dr. J. Verhoeff: 'Het programmeren'.
11.45–12.45 u. Prof. dr. A. van der Sluis: 'De numericus als strateeg'.
12.45–14.00 u. Lunch.
14.00–15.00 u. Prof. dr. ir. L. A. M. Verbeek: 'Over semantiek voor computers'.

Ofschoon deze bijeenkomst in de eerste plaats bestemd is voor leraren, zijn alle overige belangstellenden eveneens van harte welkom. I.v.m. de te reserveren plaatsruimte wordt ieder die aan deze bijeenkomst wenst deel te nemen verzocht, hiervan zo spoedig mogelijk bericht te geven aan Dr. Th. J. Korthagen. Torenlaan 12 te Warnsveld (tel. 05750–15105)
en tevens te vermelden of hij aan de gemeenschappelijke lunch wenst deel te nemen. (De kosten voor de lunch ten bedrage van *f* 6,– gelieve men te storten op giro nr. 824.808 t.n.v. AMRO-Bank Zutphen t.g.v. Dr. Th. J. Korthagen te Warnsveld, of ter plaatse te voldoen. Voor deelname aan de lunch is opgave van tevoren **noodzakelijk**).

De deellijnen van de hoeken van twee lijnen

L.H. JANSSEN

Heerlen

Bij de behandeling van het opstellen van de vectorvoorstellingen van de deellijnen van de hoeken van twee lijnen wordt bij het voortgezet onderwijs veelal een beroep gedaan op stellingen uit de planimetrie o.a. op: 'De punten van de deellijnen van de hoeken van twee lijnen hebben gelijke afstanden tot die lijnen' en 'De diagonalen van een ruit delen de hoeken middendoor'.
Dit komt vaak bij de leerlingen onbevredigend over. Het komt hen voor als bouwen op los zand.
Dit kan vermeden worden door de volgende stelling[1] in te voeren: *Als $\bar{a}$ en $\bar{b}$ respectievelijk richtingsvectoren zijn van de lijnen l en m, dan zijn* $\|\bar{a}\|.\bar{b} + \|\bar{b}\|.\bar{a}$ *en* $\|\bar{a}\|.b - \|\bar{b}\|.\bar{a}$ *richtingsvectoren van de deellijnen van de hoeken gevormd door de lijnen l en m.* ($\|a\|$ betekent de norm van vector $\bar{a}$)
Bij het bewijs van deze stelling wordt ervan uitgegaan, dat bij de definitie van inproduct of daarna bewezen wordt, dat vaststaat dat de volgende proposities waar zijn:

A_1 Het inproduct van twee vectoren $\bar{a}$ en $\bar{b}$ is $(\bar{a}, \bar{b}) = \|\bar{a}\| \,.\, \|\bar{b}\| \cos \varphi$.

A_2 $(\bar{a}, \bar{a}) = \|\bar{a}\|^2$

A_3 $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$

A_4 $\lambda(\bar{a}, \bar{b}) = (\lambda\bar{a}, \bar{b}), \lambda \in \mathbb{R}$

A_5 $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c})$.

en dat in de definitie van vector $\lambda\bar{a}$ met behulp van vector $\bar{a}$ voorkomt $\|\lambda\bar{a}\| = |\lambda| \,.\, \|\bar{a}\|$.

1. De leerlingen van de '*Ser*viam' scholengemeenschap te Sittard en die van het *Co*riovallum-college te Heerlen noemen deze de *Serco*-stelling.

Eerst wordt bewezen stelling a:
Zijn $\bar{a}$ en $\bar{b}$ respectievelijk richtingsvectoren van de lijnen l en m en is $\|\bar{a}\| = \|\bar{b}\|$,

dan is de hoek gevormd door de lijn l en de lijn k met richtingsvector $\bar{a} + \bar{b}$ gelijk aan de hoek gevormd door de lijnen k en m.
Bewijs: Zij φ de grootte van de hoek tussen de lijnen l en k en ψ de grootte van de hoek tussen de lijnen k en m, dan moet bewezen worden dat $\cos\varphi = \cos\psi$ of omdat

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{a}+\bar{b})}{\|\bar{a}\| \,.\, \|\bar{a}+\bar{b}\|} \text{ en } \cos\psi = \frac{(\bar{a}+\bar{b}, \bar{b})}{\|\bar{a}+\bar{b}\| \,.\, \|\bar{b}\|} \qquad (A_1)$$

$$\text{dat } \frac{(\bar{a}, \bar{a}+\bar{b})}{\|\bar{a}\| \,.\, \|\bar{a}+\bar{b}\|} = \frac{(\bar{a}+\bar{b}, \bar{b})}{\|\bar{a}+\bar{b}\| \,.\, \|\bar{b}\|}$$

of omdat $\|\bar{a}\| = \|\bar{b}\|$ (gegeven) en $\|\bar{a}\| \,.\, \|\bar{a}+\bar{b}\| = \|\bar{a}+\bar{b}\| \,.\, \|\bar{a}\|$ ('n commutatieve wet van de reële getallen) dat $(\bar{a}, \bar{a}+\bar{b}) = (\bar{a}+\bar{b}, \bar{b})$ is. Nu is:

$(\bar{a}, \bar{a}+\bar{b}) = (\bar{a}, \bar{a}) + (\bar{a}, \bar{b})$	(A_5)
$(\bar{a}, \bar{a}) + (\bar{a}, \bar{b}) = \|\bar{a}\|^2 + (\bar{a}, \bar{b})$	(A_2)
$\|\bar{a}\|^2 + (\bar{a}, \bar{b}) = \|\bar{b}\|^2 + (\bar{a}, \bar{b})$	(gegeven)
$\|\bar{b}\|^2 + (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{b})$	(A_2)
$(\bar{b}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{a})$	$(A_3$
$(\bar{b}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{a}) = (\bar{b}, \bar{a}) + (\bar{b}, \bar{b})$	(commutative wet)
$(\bar{b}, \bar{a}) + (\bar{b}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a}+\bar{b})$	(A_5)
$(\bar{b}, \bar{a}+\bar{b}) = (\bar{a}+\bar{b}, \bar{b})$	(A_3)
Dus $(\bar{a}, \bar{a}+\bar{b}) = (\bar{a}+\bar{b}, \bar{b})$.	

Stelling b: $\| \|\bar{a}\|.\bar{b}\| = \| \|\bar{b}\|.\bar{a}\|$.
Bewijs: Uit $\|\lambda\bar{a}\| = |\lambda| \,.\, \|\bar{a}\|$ volgt:

$$\| \|\bar{a}\|.\bar{b}\| = \|\bar{a}\| \,.\, \|\bar{b}\| = \|\bar{b}\| \,.\, \|\bar{a}\| = \| \|\bar{b}\| \,.\, \bar{a}\|.$$

Het bewijs van de hoofdstelling verloopt nu als volgt: Zijn $\bar{a}$ en $\bar{b}$ de richtingsvectoren respectievelijk van de lijnen l en m, dan is volgens stelling b: $\| \|\bar{a}\| \,.\, \bar{b}\| = \| \|\bar{b}\|.\bar{a}\|$. Volgens stelling a is nu de hoek tussen de lijn l en de lijn k met richtingsvector $\|\bar{b}\| \,.\, \bar{a} + \|\bar{a}\| \,.\, \bar{b}$ en de hoek tussen de lijnen k en m gelijk. Immers men kan in de plaats van de richtingsvectoren van respectievelijk de lijnen l en m nemen de hiervan afhankelijke richtingsvectoren $\|\bar{b}\| \,.\, a$ en $\|\bar{a}\| \,.\, \bar{b}$.
Vervangt men in het voorgaande de richtingsvector $\bar{b}$ van de lijn m door $-\bar{b}$, dan wordt analoog aangetoond dat een richtingsvector van de lijn k is:

$$\|-\bar{b}\|.\bar{a} + \|\bar{a}\| \,.\, (-\bar{b}) = |-1| \,.\, \|\bar{b}\|.a - \|\bar{a}\|.\bar{b} = \|\bar{b}\|.\bar{a} - \|\bar{a}\|.\bar{b}.$$

Voorbeeld: Gegeven de lijnen $l : \bar{x} = \binom{2}{0} + \lambda\binom{}{-1}$ en $m : \bar{x} = \binom{2}{0} + \lambda\binom{1}{7}$.
De 'gelijke afstand' methode:
De normaalvergelijking van l is $(\binom{x}{y}, \binom{1}{1}) = (\binom{2}{0}, \binom{1}{1})$ of $(\binom{x}{y}, \binom{1}{1}) = 2$. De vergelijking

van l is dan $x + y - 2 = 0$.
Analoog wordt afgeleid dat de vergelijking van m is $7x - y - 4 = 0$.
Als (x_0, y_0) de coördinaten van een punt van de deellijnen van de hoeken gevormd door de lijnen l en m zijn, dan is

$$\frac{|x_0 + y_0 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|7x_0 - y_0 - 14|}{\sqrt{50}}$$

De x_0 en y_0 moeten dan voldoen aan de vergelijking $\sqrt{50}(x + y - 2) = \sqrt{2}(7x - y - 14)$ of aan de vergelijking $-\sqrt{50}(x + y - 2) = \sqrt{2}(7x - y - 14)$ of na herleiding aan $x - 3y - 2 = 0$ of aan $3x + y - 6 = 0$.
De normaalvergelijkingen zijn dan $(\binom{x}{y}, \binom{1}{-3}) = 2$ en $(\binom{x}{y}, \binom{3}{1}) = 6$. De vectorvoorstellingen van de deellijnen zijn dan $\bar{x} = \binom{2}{0} + \lambda\binom{3}{1}$ en $\bar{x} = \binom{2}{0} + \lambda\binom{-1}{3}$.

De 'ruit'-methode: De norm van de vector $\binom{1}{-1}$ is $\sqrt{2}$ en de norm van de vector $\binom{1}{7}$ is $\sqrt{50}$. Door de kentallen van de vector $\binom{1}{-1}$ met $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = 5$ te vermenigvuldigen krijgt men een richtingsvector van de lijn l, die afhankelijk is van de vector $\binom{1}{-1}$ n.l. $\binom{5}{-5}$ met een gelijke norm als die van vector $\binom{1}{7}$.
De deellijnen hebben dus als richtingsvectoren (zie Wiskunde bovenbouw havo deel 3 door Dr A. van Dop enz. bladzijde 46)

$$\binom{5}{-5} + \binom{1}{7} = \binom{6}{2} \text{ en } \binom{5}{-5} - \binom{1}{7} = \binom{4}{-12}$$

of na vereenvoudiging de hiervan afhankelijke vectoren $\binom{3}{1}$ en $\binom{-1}{3}$.
De vectorvoorstellingen van de deellijnen van de hoeken gevormd door de lijn l en m zijn dan:

$$\bar{x} = \binom{2}{0} + \lambda\binom{3}{1} \text{ en } \bar{x} = \binom{2}{0} + \lambda\binom{-1}{3}.$$

Met behulp van de in dit artikel behandelde hoofdstelling wordt dit nu: De richtingsvectoren van de deellijnen zijn:

$$\left\|\binom{1}{7}\right\| \cdot \binom{1}{-1} + \left\|\binom{1}{-1}\right\| \cdot \binom{1}{7} \text{ en } \left\|\binom{1}{7}\right\| \cdot \binom{1}{-1} - \left\|\binom{1}{-1}\right\| \cdot \binom{1}{7}$$

of

$$\binom{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \text{ en } \binom{4\sqrt{2}}{-12\sqrt{2}}$$

of na vereenvoudiging de hiervan afhankelijke vectoren $\binom{3}{1}$ en $\binom{-1}{3}$.
De vectorvoorstellingen van de deellijnen worden dan:

$$\bar{x} = \binom{2}{0} + \lambda\binom{3}{1} \text{ en } \bar{x} = \binom{2}{0} + \lambda\binom{-1}{3}.$$

. . . 'Het is toch logisch!' . . .

J.C.L. KETELAAR

Schiedam

In het begin van de huidige cursus had ik een leerzame ervaring, betreffende het denkpatroon van de leerlingen uit de eerste klas. In een opgave was de stelling over de bissectrices van twee nevenhoeken aan de orde geweest. Het leek me aardig om op een repetitie het omgekeerde van deze stelling te laten aantonen. Om het niet te moeilijk te maken door middel van een getalvoorbeeld.
Gegeven waren twee nevenhoeken en de bissectrice van een van deze hoeken. Een loodlijn op de bissectrice deelde de andere hoek in twee stukken. Gevraagd werd de grootte van deze stukken te berekenen. De leerlingen zouden dan vanzelf ontdekken, dat beide delen gelijk zijn, waardoor de loodlijn ook bissectrice is.
Tot mijn grote verbazing werd door bijna iedereen maar vast aangenomen dat de loodlijn automatisch bissectrice is, waardoor deze opgave totaal onbruikbaar werd. Toen ik het probleem in de klas wilde behandelen waren de reacties: het is toch logisch dat het een bissectrice is! Het idee dat je een omgekeerde stelling ook moet bewijzen sprak in dit vroege stadium helemaal niet aan.
Nog steeds zijn er leerlingen die moeite hebben met opgaven als die, waarin bewezen moet worden dat allerlei eigenschappen van een parallellogram ook als definitie kunnen dienen.
Soms kan ik met een tegenvoorbeeld (natuurlijk wel van iets anders) zo'n 'logische' gevolgtrekking bestrijden.
Bijv,: in een vlieger staan de diagonalen loodrecht op elkaar, maar een vierhoek die deze eigenschap heeft hoeft geen vlieger te zijn.

Het boek dat wij in de eerste klas (gymnasium) gebruiken is dat van Vredenduin. Sommige opgaven zijn wel erg moeilijk. De meetkunde uit de serie Moderne Wiskunde is totaal anders, maar die is me juist te speels, te weinig streng. Waarschijnlijk gaan wij over op de nieuwe methode 'Sigma', waarvan het eerste deel een veelbelovende indruk maakt.

Commentaar op het artikel ... 'het is toch logisch!' ...

DR. P. M. VAN HIELE

Voorburg

In de jaren vijftig zou een docent die regelmatig de didaktische literatuur las niet verbaasd geweest zijn over het resultaat van een proefwerk, zoals hierboven is beschreven. In die tijd werd immers de grote strijd geleverd over de vraag:
'Geven we aan het begin van de meetkunde een intuïtieve inleiding, of niet? '
Al is toen het pleit voor de intuïtieve inleiding min of meer gewonnen, het is duidelijk, dat de motieven die toen hebben gegolden lang niet door alle wiskundedocenten werden onderschreven en door vele docenten van nu niet worden gekend. Het is nodig, dat deze zaak weer eens onder de aandacht wordt gebracht. Ik zal het hier kort doen; kort geleden is er van mij een publikatie verschenen waarin dieper op deze materie wordt ingegaan.

Wanneer iemand voor het eerst met een nieuw vak in aanraking komt, is hij voor geen enkele redenering in dit vak toegankelijk, men kan hem niets uitleggen.
Uitleggen betekent immers: de verschillende bouwstenen van het vak in een overzichtelijke vorm rangschikken en dan in dit totaal op verbanden wijzen. Maar de beginner kent geen bouwstenen, hij kan ze dus ook niet herkennen; de uitlegger spreekt tot hem in een taal die hij niet kan verstaan, want hij kent de inhoud van de begrippen niet die bij de uitleg worden gebruikt. Een mathematicus bijvoorbeeld die voor het eerst een filosofisch betoog leest dat afkomstig is van een historicus, heeft de neiging te oordelen, dat hij onzin voorgeschoteld krijgt. Hij is immers met deze wijze van redeneren onbekend. Pas als hij op de hoogte is van historische achtergronden en als hij op de hoogte is van het feit; dat het betoog afkomstig is van een historicus, wordt het geheel voor hem zinvol.

Ieder wetenschappelijk werk zou eigenlijk moeten beginnen met een aftasting, over welke zaken men het zeker eens kan zijn. Dit kunnen niet anders dan zaken zijn, waarmee men min of meer op de hoogte is. Een cursus in de meetkunde behoort dus te beginnen met begrippen die de leerling enigszins bekend zijn, vandaar, dat zoveel cursussen in de meetkunde beginnen met een kubus. Maar men zou even goed kunnen beginnen met een tegelpatroon, of een wiel met spaken, of zo iets. Het directe leerdoel is dan: het leren kennen van namen van figuren en van

delen van figuren; vervolgens het leren kennen van verbanden tussen figuren en de namen van die verbanden. Het aantal begrippen dat een leerling in die beginperiode leert kennen is bijzonder groot. Men moet zich daarbij realiseren, dat de accenten voor de leerlingen in dit begin heel anders liggen dan bij ons. Het is heel gewoon, als een leerling op de vraag: 'Wat weet je van een parallellogram? ' antwoordt: 'Het heeft vier zijden, vier hoekpunten en twee diagonalen.' Het feit, dat de diagonalen elkaar halveren, dat de overstaande zijden congruent en evenwijdig zijn, dat overstaande hoeken congruent zijn, spreekt zo'n leerling nog helemaal niet aan. We zijn al heel erg geslaagd met ons onderwijs, als in de loop van het eerste halfjaar allerlei figuren voor de leerlingen een gestalte krijgen: als het parallellogram voor de leerlingen een figuur wordt waarvan zij vele zaken kunnen 'aflezen'.

Zo kan ook de figuur bestaande uit twee elkaar snijdende rechten met de bisectrices van de hoeken die deze met elkaar vormen, een gestalte hebben gekregen.

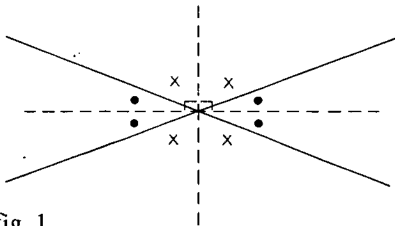


fig. 1

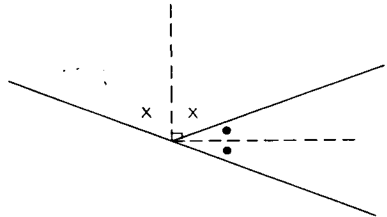


fig. 2.

De leerlingen zien dan een figuur waarin twee maal vier gelijke hoeken optreden. Zij zien daarin bovendien nog vier rechte hoeken. De figuur bestaande uit twee nevenhoeken met hun bisectrices is daarvan een deel; met heel weinig oefening zullen de leerlingen in hun voorstelling het geheel door aanvulling uit het gegeven onderdeel kunnen verkrijgen.

Het kunnen aflezen van eigenschappen uit zo'n totale figuur is het typische van het intuïtieve stadium van de meetkunde. De leerlingen weten iets van nevenhoeken met hun bisectrices, omdat het deel uitmaakt van een totaalbeeld dat zij bezitten. Ik verwerp hier het woord 'inductieve inleiding', omdat inductie de mogelijkheid van een deductie inhoudt. Bij een inductie verwacht men een logisch verband in een bekend groter geheel, omdat men een verband in een kleiner geheel gekonstateerd heeft. Dit is hier beslist niet het geval: de leerlingen weten nog niet, wat een logisch verband is. Zij kunnen dit niet weten, omdat zij niet over voldoende ervaring op dit gebied beschikken. Zij kunnen de taal van het logische verband niet verstaan, omdat zij die taal nog niet geleerd hebben en zij kunnen die taal niet rechtstreeks leren, omdat de begrippen die bij zo'n leren door de taalsymbolen worden aangeduid, hun niet bekend zijn.

De rechte die loodrecht staat op de bisectrix van een van de nevenhoeken en die gaat door het gemeenschappelijke hoekpunt, is automatisch de andere bisectrix.

Automatisch, want hij bezet die plaats in de gestalte van twee nevenhoeken met hun bisectrices..

Een exact bewijs dat op deze gestalte gegrondvest is, verloopt als volgt:
De bisectrices van twee nevenhoeken zijn onderling loodrecht; door een gegeven punt gaat slechts één rechte loodrecht op een gegeven rechte; de rechte die het hoekpunt van de twee nevenhoeken bevat en loodrecht is op een van de bisectrices van die nevenhoeken, is dus de bisectrix van de andere nevenhoek. Ook leerlingen die hun klas vooruit zijn en al een beetje logisch kunnen denken, zullen geneigd zijn van het begin af aan te nemen, met twee bisectrices te doen te hebben. De redenering: 'De verzameling der elementen x met de eigenschap P bestaat uit één element; de elementen a en b hebben beide de eigenschap P; konklusie: $a = b$" wordt door hen als vanzelfsprekend geacht.
Men kan verschillend oordelen over het geven van 'bewijzen' in de brugklas. Sommige docenten weten, dat men van de leerlingen niet mag verwachten, dat zij bewijzen zullen begrijpen, maar zij menen, dat de leerlingen, als men het hun maar vaak genoeg voordoet, langzamerhand zelf met dit spelletje zullen meedoen. Ik kan niet bewijzen, dat deze gedachtengang fout is. Wel heb ik waargenomen, dat docenten en leerboeken in hun machteloosheid de zaak duidelijk te maken, wegen inslaan die de leerlingen op een dwaalspoor moeten brengen. Als men de leerlingen suggereert, dat bewijzen betekent: aantonen, dat iets waar is, dan is men op de verkeerde weg. Als men, om aan te tonen, dat het omgekeerde van een stelling niet hetzelfde is, als de stelling zelf, spreekt van straten die nat worden als het regent en daarna zegt: 'Als de straten nat worden, dan behoeft het nog niet te regenen', dan maakt men een enorme blunder. De omkering van een stelling is niet hetzelfde als de omkering van een kausaal verband.

Veel veiliger is het in het brugjaar in het geheel niet te spreken van bewijzen. Het brugjaar moet men opvatten als een periode van verkenning en bij zo'n verkenning is er geen plaats voor 'gegeven, te bewijzen'. Later, als de leerlingen vertrouwd zijn met eigenschappen van getallen, van bewerkingen met getallen, van figuren, van afbeeldingen in het vlak, kan men gaan ordenen. Deze eigenschappen hebben zich dan in hun denken tot een totaliteit ontwikkeld en zij hebben dan al de mogelijkheid zich in die totaliteit te oriënteren. Waarschijnlijk leent zich de algebra beter voor zo'n logische ordening dan de meetkunde. De logische ordening van de meetkunde moest men liever overlaten aan leerlingen die wiskunde II doen en dan nog liefst met vectoren. Dit is echter een nieuw onderwerp, dat geheel buiten het bestek van dit kommentaar valt.

Wortels trekken?

P.Th. SANDERS

Amsterdam

In het kort:
Er was eens een getal met de naam $\sqrt{7}$, maar iedereen, die hem tegen kwam zei: jij bent geen getal, we moeten nog iets met je doen. Dat stemde $\sqrt{7}$ zeer droef.

Iets dergelijks zeg ik meestal in de klassen, waar ik de wortels geïntroduceerd heb, als ik ontdek, dat de absolute topper voor velen — het worteltrekken — de verkeerde kant dreigt op te gaan.
Een en ander, omdat ik van mening ben, dat wortels in eerste instantie helemaal niet getrokken dienen te worden. De vraag: is het trekken van de wortel uit $a \geqslant 0$ hetzelfde als $\sqrt{a}$, beantwoord ik beslist niet meteen met 'ja'.
Voor mij is $\sqrt{a}$ een getal.
De praktijk op school (althans bij mij) wijst uit, dat de meeste leerlingen $\sqrt{a}$ niet als getal zien, maar als bewerking, er moet nog iets met a gebeuren.
Vandaar de sprookjesachtige inleiding.
Ik zou ook nijdig worden, als de leerlingen de frustrerende gedachte zouden hebben, dat bijvoorbeeld de breuk 3/7 betekent: voer de deling 3 : 7 uit.
Het feit, dat voor velen $\sqrt{7}$ een bewerking inhoudt, leidt tot opmerkingen als:
$\sqrt{7}$ kan niet.
$\sqrt{7}$ bestaat niet.
Moet je $\sqrt{7}$ uitrekenen?
Maar $\sqrt{7}$ is toch niet precies.
En de leraar zelf:
Je mag die wortel opzoeken hoor.
De wortels mag je laten staan.
Het is eigenlijk wel begrijpelijk, dat er misverstanden ontstaan.
En dan vraagt de docent zich af, waarom de leerling in de hogere klassen vaak verstek laat gaan, als er werkelijk aan het begrip 'wortel' geappelleerd wordt. (zoals in een vierde klas havo: $\sqrt{x^2 + 4} = x + 2$.)
Het hoofdstuk over wortels begint meestal met een definitie, bijvoorbeeld:
Onder $\sqrt{a}$ ($a \geqslant 0$) verstaan we het niet negatieve getal, waarvan het kwadraat a is.
Dus $\sqrt{9} = 3$.

Bepaal nu zelf $\sqrt{36}$ enz.
Ten eerste ontgaat de leerling in de meeste gevallen, waarom het te zoeken getal niet negatief mag zijn en ten tweede, en dat is erger, krijgt de leerling het idee, dat men voor $\sqrt{a}$ een getal moet zoeken. (Voor hen is dat een rationaal getal, of een oneindige decimale breuk.)
De opgaven, na de definitie, versterken dat idee nog. Dat het getal, waarvan het kwadraat a is, nu juist $\sqrt{a}$ is, ontgaat een ieder zeker.
De essentie, namelijk, dat er een nieuwe getallenverzameling wordt ingevoerd, is zoek.
Hoewel er zeker aandacht wordt besteed aan operaties met wortelgetallen, blijkt toch steeds weer, dat de leerling rationale getallen gaat (op)zoeken.
Wellicht functioneert de definitie toch niet zo goed als we menen. Ik ben inderdaad van mening, dat we met een definitie even moeten wachten. Laten we beginnen met de motivatie: waarom wortelgetallen?
De vergelijking $x^2 = 7$ is m.i. niet zo'n best argument, in ieder geval ontstaat er bij deze vergelijking geen behoefte aan nieuwe getallen. De vergelijking is gewoon onoplosbaar en waarom ook niet?
Wellicht spreekt het volgende voorbeeld meer aan:
Teken een vierkant met diagonalen, die de lengte 8 hebben. De oppervlakte van dit vierkant is 32.
Dus de lengte van de zijde van het vierkant, is een getal, dat met zichzelf vermenigvuldigd 32 oplevert. Laten we dat getal $\sqrt{32}$ noemen.
Duidelijk blijken nu enkele zaken:
1 $\sqrt{32}$ is een getal, dat op de getallenlijn is aan te geven; je kunt het lijnstuk namelijk afzetten.
2 $\sqrt{32}$ is positief.

Ik wil beslist niet beweren, dat de zaak nu 'rond' is, maar genoemde definitie zal m.i. nu meer betekenis krijgen.
Maar voor we met de definitie komen, eerst nog wat oefening.
Bijvoorbeeld: construeer een vierkant met zijde $\sqrt{2}$.
Tussen welke gehele getallen ligt $\sqrt{32}$?
Construeer een vierkant met zijde $\sqrt{16}$. Kennelijk geldt $\sqrt{16} = 4$.
De volgorde zou dus kunnen zijn:

a motivatie (zoals genoemd)
b enige oefening
c de definitie
d sommige van de wortelgetallen zijn rationaal te schrijven
e operaties met wortelgetallen
f en dan pas het benaderen van wortelgetallen.

Het moet de leerling duidelijk worden, dat wortelgetallen in het algemeen geen benadering behoeven.
Het idee: $\sqrt{a}$ is (zelf) een getal, moet op de voorgrond staan.
Sinds kort pas ik deze benadering in, in het boek. Ik ben eigenlijk wel benieuwd, hoe anderen over dit onderwerp denken.

Herexamen Wiskunde II

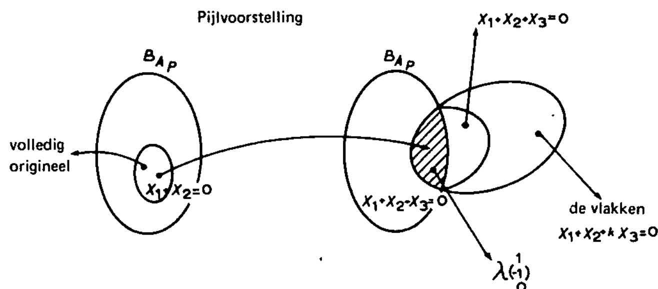
Is opgave 3d een geschikt examenvraagstuk?

J. M. F. WIJENBERG
Haelen

Naar aanleiding van het herexamen wi II, dat gehouden werd op 28-8-74, zou ik omtrent vraagstuk 3d een en ander willen opmerken. Het gestelde probleem luidt als volgt:
Ten opzichte van een orthonormale basis in R_3 zijn gegeven de afbeeldingen A_p met matrix $\begin{pmatrix} 0 & p & -p \\ p & 0 & p \\ p & p & 0 \end{pmatrix}$ waarin $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Vraag d luidt:
Welke vlakken hebben bij elke A_p hetzelfde volledige origineel als het vlak $x_1+x_2+x_3 = 0$?

Als toelichting volgt: N.B. 'Bij een afbeelding is het volledig origineel van een verzameling V de verzameling van alle originelen van de elementen V' (Dit moet zijn: '. . . elementen *van* V').
Een examenkandidaat, die opgeleid is m.b.v. de methode 'Getal en Ruimte' heeft de volgende definitie van volledig origineel geleerd: 'We noemen X het volledig origineel van Y ($Y \subset B_f$) als X de verzameling is van de originelen van alle elementen van Y'.
Een ieder kan zich gemakkelijk overtuigen, dat de geplaatste opmerking achter vraagstuk 3d niet in strijd is met de definitie, die de schrijvers van 'Getal en Ruimte' bezigen. Echter er ontbreekt $Y \subset B_f$, en dit kan een goede V.W.O.-leerling op een dwaalspoor brengen.
Immers deze leerling zal bij nadere bestudering van het probleem ontdekken dat het bereik B_{A_p} een 2-dimensionale vectorruimte is, waarvan de kentallen voldoen aan $x_1+x_2-x_3 = 0$. Voor deze leerling wordt nu de uitdrukking 'hetzelfde volledig origineel als het vlak $x_1+x_2+x_3 = 0$' onbegrijpelijk immers $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} | x_1+x_2+x_3 = 0\} \not\subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} | x_1+x_2-x_3 = 0\}$. In dit verband zou men dus beter kunnen spreken van: 'hetzelfde volledig origineel als de lijn $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$', omdat $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de snijlijn is van $x_1+x_2+x_3 = 0$ met het bereik $x_1+x_2-x_3 = 0$.
Stelt men in de definitie van volledig origineel die 'Getal en Ruimte' geeft niet de eis dat $Y \subset B_f$ (zie b.v. *TOPOLOGIE 1* door Prof. Dr. Franz, Sammlung Göschen, band 1181, blz. 32) en merkt men op, dat voor iedere $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\} A_p$ een afbeelding is met domein R_3 en bereik $x_1+x_2-x_3 = 0$, dan is het antwoord op de vraag 'Welke vlakken . . .' een evidentie. (Zie de pijlvoorstelling van A_p.) Ik meen, dat een vraag naar een evidentie een V.W.O.-leerling op examen in verwarring brengt. Vraag 3d lijkt me ook daarom minder geschikt.

Tenslotte: het antwoord alle vlakken door $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zal een V.W.O.-leerling hoogst merkwaardig vinden omdat alle punten van zo'n vlak, die niet op de lijn $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liggen niet als beeldpunt optreden.



Rectificatie

In het vorige nummer is op pagina 74 een drukfout in de tekst geslopen. In opgave 6 van het havo-examen staat

$$f\colon n \to 2n \cdot 2|x| \text{ en } g\colon n \to 2\tfrac{1}{2}n + 1\tfrac{1}{2}.$$

Dit moet zijn

$$f\colon n \to 2^x \cdot 2^{|x|} \text{ en } g\colon x \to 2^{\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}}.$$

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

School science and mathematics, 641-646; december 1972-mei 1973.

W.A. Farmer e.a., Pilot studies; mathematics and science teacher education;
Th. F. Mulcrone, The solution of inequalities.

J. Knaupp, Are children's attitudes toward learning arithmetic really important?
R. Warwick and A. Irmer, Don't tell me about it – do it;
Ch.W. Knight, Doctoral dissertation research in science and mathematics;
Ch.W. Tryon, The logic of implication;
Ch.R. Neatrour and J.L. Mullenex, Calculus in the high school?

A.R. Brousseau, Mathematics laboratories;
Th.H. Fisher, An evaluation of the junior high school program;
D.J. Kuhn, A study of the effects of increased levels of information on subsequent problem solving behaviour;
Ch.W. Knight, Doctoral dissertion research in science and mathematics;
E.D. Hobbs, The secular quaternity.

N.F. Smith, Bernoulli, Newton and dynamic lift,
D.R. Duncan and P.H. Littwiller, Games patterns and Pascal's triangle;
Earl Lochner e.a., A report of the use of unipacs in teaching high school algebra;
C.J. Troost, Science teaching and the new education;
L.E. Boyer e.a., Regions and related concepts;
J.M. Sherill, Pre-service mathematics education.

R.J. McGehee and R.N. Passero, Simulated field problems in geology;
L.H. Kanter, A note on the optical property of the ellipse;
F. Swetz, Field survey, an aid to geometry instruction in the People's Republic of China.

W.E. Shall, Comparing mental arithmetic modes of presentation in elementary school mathematics;
R.W. Bybee, The teacher I like best;
Ch.D. Gilbert e.a., Problem solving behaviour of first grade children from differing socio-economic backgrounds,
D.H. Devorking, The true orbit of the moon.

Mathematical Gazette, 348-400; december 1972-juni 1973.

W.A. Broomhead, Pascal (mod.p);
B.C. Rennie, Chains and whips in the teaching of mathematics;
P.J. Giblin, What is an asymptote?
J. Shiu, How slow can a series converge?

C.G. Gray, Solids of constant breadth;
M.D. Dampier, An algebraic theorem related to the theory of relativity;
F. O'Hara, A 24-point sphere for the orthocentric tetrahedron;
R.R. Laxton and J.A. Anderson, Linear recurrences and maximal length sequences;
S.N. Collings, Further logic diagrams in various dimensions.

R. Schlapp, The contribution of the Scots to mathematics;
T.J. Fletcher, Easy ways of going round the bend;
D.E. Bayley, The effect on the solution of a problem of pertubations to the data;
D.M. Rax, Magic squares and matrices;
A. Smith, Some regular compounds of star-polyhedra;
W.J. Courcouf, Back to areals;
L. Mirsky, A footnote to a minimum problem of Mordell;
J.F. Rigby and J. Wiegols, Independent axioms for vector spaces.

G. Polya, A story with a moral;
J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, Triangulated polygons and frieze patterns;
B.H. Neumann, Byron's daughter;
Geoffrey and Julia Matthews, Pre-school pre-mathematics;
C.A. Rogers, Length, area and volume;
R.P. Burn, Geometrical illustrations of group-theoretical concepts;
D.G. Ball, The constructibility of regular and equilateral polygons on a square board;
L.A. Pars, A graphical solution of Euler's equations.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, XXVI[1] –XXVI[4], januari 1973-juni 1973.

H. Hering, Ein Fixpunktsatz für endliche Mengen;
R. Krauskopf, Erarbeitung der Graphen von Sinus- und Cosinusfunktion aus vorgegebenen Funktionaleigenschaften;
P. Hohler, Uber pseudomagische Quadrate dritter Ordnung;
W. Ness, Zur Theorie des ebenen Punktgitters;
H. Schupp, Extremale Abstandssumme im Dreieck.

R. Fritsch, Kategorien, Funktionen, natürliche Transformationen;
J. Weniger, Gewicht soll ein Synonym für Mass werden;
S. Nöding, Modelle und Modelldenken im Chemieunterricht;
D.C. Harris, Ein neues Modell der Lehrerausbildung an der Universität London;
H. Wolgast, Kleincomputer für die Schule;
G. Müller, Das Lösen von Bestimmungsgleichungen.

L. Klingen, Des Stellenwert von Abnehmerbefragungen für das Curriculum der Mathematik in der reformierten gymnasialen Oberstufe;
J. Stärk, Zur Festlegung der Multiplikation in C;
E. Steller, Zwei Beispiele aus dem Mathematikunterricht an den Europaïschen Schulen;
H. Schramm, Informationsübertragung durch Zeichen;
K. Kress, Digitale Elektronik.
W. Kuhn und G. Schwarz, Eine experimentelle Anordnung zur Behandlung des Linieniategrals der magnetischen Feldstärke;
Fr. Ferschl, Nationales Verfahren bei Unsicherheit;
H. Eggs, Kleinrechner für die Schule;
H. Schneider, Lösungen 'falscher' Gleichungen;
A. Werner, Neue Bestimmung der Gravitations-Rotverschiebung des Sirius-Begleiters.

Boekbespreking

A. Permentier, *Meetkunde* III, Wiskunde De Rij 54, De Nederlandsche Boekhandel, Antwerpen Utrecht 1973, 340 blz., 285 BF.
Dit boek is bestemd voor de voorlaatste klas van het voortgezet onderwijs. Behandeld worden de beginselen van de meetkunde met vectoren.
Op klassieke wijze wordt eerst een axiomatisch gefundeerde inleiding in de stereometrie ontwikkeld om te komen tot de stellingen betreffende onderlinge ligging van lijnen en vlakken. Dan is materiaal genoeg verzameld om over te gaan tot de vectormeetkunde. De geldigheid van de vectoraxioma's in drie dimensies wordt grotendeels aangetoond en, waar dat niet gemakkelijk mogelijk is, gepostuleerd. We kunnen op twee manieren vectoren invoeren: vrije vectoren en puntvectoren (plaatsvectoren). De schrijver voert beide soorten vectoren in en toont aan, dat men op deze wijze komt tot twee isomorfe lineaire ruimten. Gelukkig worden de twee soorten vectoren zorgvuldig gescheiden gehouden. De vrije vectoren corresponderen met de translaties in de oorspronkelijke stereometrie, de puntvectoren met de punten. Elk beroep op de aanschouwing, ook t.a.v. de volgorde, wordt vermeden. Gelukkig weet de schrijver ook nog wel eens water in de wijn te doen: binnen- en buitengebied van een veelhoek en van een veelvlak worden aan de aanschouwing ontleend.
Nu het fundament gelegd is, kiest de auteur één ijk (basis) in de ruimte en gaat verder met het ontwikkelen van de theorie van de affiene ruimte met behulp van puntvectoren. Deze beschouwingen worden afgesloten met een hoofdstuk over lineaire afbeeldingen.
Het volgende hoofdstuk gaat over oriëntatie. Een lineaire niet-singuliere afbeelding van de ruimte wordt positief of negatief genoemd al naargelang zijn determinant positief resp. negatief is. De bases van de ruimte kunnen op grond van deze definitie verdeeld worden in twee ekwivalentieklassen, waarvan de ene de basis (e_1, e_2, e_3) bevat en de andere de basis (e_1, e_3, e_2). Dit leidt tot twee mogelijke oriëntaties van de ruimte.
De schrijver staat nu voor een belangrijke keus: eerst het inprodukt behandelen en daaruit de eigenschappen van de orthogonaliteit afleiden of eerst de orthogonaliteit behandelen en daarna het inprodukt. Hij kiest het laatste, hetgeen interessant is.
Nu de orthogonaliteit niet op vectoriële wijze gefundeerd wordt, is men verplicht een axiomatische fundering te geven. Opnieuw dus ontstaat een stuk stereometrie. Uitgegaan wordt van twee axioma's en een definitie:
axioma: iedere richting is orthogonaal met precies één stand (een stand is een verzameling onderling evenwijdige vlakken);
definitie: richting A is orthogonaal met richting B als richting A orthogonaal is met een stand die evenwijdig is met richting B;
axioma: de relatie orthogonaal tussen richtingen is symmetrisch en antireflexief.
Op grond hiervan wordt een theorie van de orthogonaliteit opgebouwd. Spiegeling kan nu gedefinieerd worden en op grond daarvan rotatie, isometrie en congruentie. We weten nu, wat gelijke (congruente) lijnstukken zijn en kunnen na keuze van een lengte-eenheid vaststellen wat verstaan wordt onder de lengte van een lijnstuk.
Hiermee is een voldoende grondslag gelegd voor de definitie van het inprodukt van twee vectoren. Nu kunnen we overgaan op een orthogonale basis waarna de gewone theorie van de euclidische ruimte ontwikkeld wordt. Deze theorie wordt afgesloten met een hoofdstuk over orthogonale afbeeldingen. Tot slot komt het vectorieel produkt nog ter sprake.
Het boek is niet gemakkelijk. Maar het is helder geschreven. De schrijver is zorgvuldig en scherp in zijn formuleringen. Om kort te gaan een uitstekend verzorgd boek.

P.G.J. Vredenduin

A.F. Monna, *Functional analysis in historical perspective*, Oosthoek Publishing Companij, Utrecht, VIII + 167 blz. *f* 27,50.

Het eerste (en langste) hoofdstuk van dit boekje is getiteld 'The development of functional analysis'. Hierin wordt verteld hoe, uit het onderzoek over integraalvergelijkingen door Volterra, Fredholm, Hilbert, Schmidt (tussen 1890 en 1910) en via het werk over 'oneindig veel lineaire vergelijkingen met oneindig veel onbekenden' van F. Riesz (omstreeks 1910, maar reeds met voorgangers in de vorige eeuw) de functionaalanalyse ontstaan is. Het beroemde artikel over compacte operatoren van F. Riesz in de Acta Mathematica van 1918 is bij deze eerste ontwikkeling een indrukwekkend hoogtepunt. De Poolse school, onder leiding van Banach, heeft tussen 1920 en 1940 veel bijgedragen tot de verdere uitbouw, hoewel (zoals de schrijver terecht opmerkt) ook Hahn en Helly in Oostenrijk bij deze uitbouw betrokken waren. In het tweede hoofdstuk wordt de ontwikkeling van het begrip van een 'abstrakte' vectorruimte in de vorige eeuw besproken. Bij Grassmann (1844 en 1862) en bij Peano (1888) vindt men eigenlijk reeds de moderne definitie. Pas in de twintiger jaren echter werd deze definitie algemeen gebruikt (en de lawine van leerboeken over lineaire algebra begon pas na 1950).
In het derde hoofdstuk wordt werk van Volterra en Pincherle (Italië) en van Fréchet en Hadamard (Frankrijk) uit de periode rondom 1900 besproken. Dit werk heeft eveneens bijgedragen tot de uiteindelijke vorm van de functionaalanalyse, maar bij Hilbert, Riesz en de Poolse school bleef het onbekend, of het werd althans niet gebruikt. In het vierde hoofdstuk tenslotte noemt de schrijver enige moderne ontwikkelingen (o.a. Banach algebra, maat van Haar, niet-Archimedische analyse, toepassing op reeksen van Fourier).
De tekst bevat een aantal, soms vrij uitvoerige, citaten in het Frans, Duits of Italiaans. Voor hoelang nog zal een redelijk aantal (zelfs Nederlandse) wiskundigen zulke citaten zonder vertaling kunnen lezen? De ontwikkeling van de functionaalanalyse hangt nauw samen met die van het integraalbegrip; hierover wordt nauwelijks iets gezegd. Lezing van dit boekje kan aan iedere wiskundige zeer aanbevolen worden. De uitvoering (slappe kaft) is keurig.

A.C. Zaanen

Klaus Brockhoff — *Unternehmensforschung*. Walter de Gruyter, Berlin — New York DM. 18,00.

De schrijver begint in zijn voorwoord met een tweetal citaten, van beroemde economisten, nl. van Jevons (2e helft vorige -) en van Schumpeter (1e helft van deze eeuw). Het eerste zegt dat, zo economie een wetenschap mocht zijn, het dan een mathematische is, terwijl het tweede verklaart dat voor de praktijk de mathematiek nog lange tijd kan worden gemist. Brockhoff sluit hierop dan onmiddellijk aan met een betoog dat de wiskunde, zowel voor de economische theorie als voor de praktijk onmisbaar is.
Dit begin lijkt ons weinig gelukkig. De beide aangehaalde economisten bewogen zich op een heel ander terrein dan de onderhavige auteur; bovendien is over Jevons vaak opgemerkt dat hij volkomen onnodig zijn stof 'geleerder' en moeilijker heeft gemaakt door alles in wiskundige vormen te gieten; tegelijk met hem kwamen immers Oostenrijkse schrijvers tot vrijwel gelijke theorieën, met verder dragende conclusies, zonder van wiskunde gebruik te maken. Dit neemt niet weg dat in de huidige economische theorie een zekere hoeveelheid wiskunde niet meer kan worden gemist. Dit is echter zo onomstreden dat de schrijver dit toch nog niet eens behoeft te betogen. Hoogstens kan soms een punt van discussie zijn of bij behandeling van één of ander onderwerp een mathematische dan wel een verbale aanpak de voorkeur verdient. Doch dit alles is hier niet terzake.
Het terrein waarop onze auteur zich beweegt valt buiten de algemene economische theorie; het zou misschien als een soort uitloper van de bedrijfseconomie kunnen worden beschouwd. Doch economische (of *bedrijfs*economische) theorie komt er niet aan te pas. Het gaat hier om een methodiek van berekenen en dus om een stuk wiskunde (en wiskundige statistiek) in de praktijk toe te passen. In het buitenland spreekt men van 'operations research' en in Nederland is de benaming 'besliskunde' niet ongebruikelijk. Ondernemers en bestuurders worden vaak voor de noodzaak gesteld de juiste beslissing te nemen. Er zijn dan veelal een groot aantal kwantitatief

meetbare grootheden (b.v. vaste en variabele kosten, energieverbruik, arbeidskosten door arbeidsuren en loonkosten die weer variëren naar gelang van het soort werknemers dat men kiest) die elkaar onderling vaak ook weer beïnvloeden, en die in een zo goed mogelijke kwantitatieve verhouding tot elkaar moeten worden gebracht om een bepaald, kwantitatief meetbaar resultaat te bereiken (b.v. een bepaalde productieomvang bij minimale kosten). Het optimale punt vindt men niet door maar eens wat te gaan proberen. De operations research wil nu de bestuurder de methode aanwijzen waardoor de juiste beslissing berekenbaar wordt.
Als het echter allemaal zo ingewikkeld en moeilijk moet als Brockhoff ons suggereert dan behoeven ondernemers, die niet behoren tot de reuzen die zich een econometrisch-statistische afdeling met specialisten bemand kunnen veroorloven, er niet verder over te piekeren.
Het boekje lijkt ons vooral een heerlijke kluif voor liefhebbers in dit vak, alsook voor studenten in de bedrijfseconomie. Voor hen vooral heeft Brockhoff (hoogleraar in dit vak) zijn boekje — naar onze indruk — vooral bedoeld.

P.C. van Traa

Robert Broeckx, *Wiskunde De Rij, Schooltafels,* De Nederlandsche Boekhandel, Antwerpen/ Utrecht, 1973, 139 blz., 135 BF.

Het boek begint met de van ouds bekende logaritmentafel in vijf decimalen met interpoleren, de tafels betreffende log sin en log tg, eveneens in vijf decimalen met interpoleren, en de directe goniometrische tafels van hoeken in graden.
Daarna volgen de moderne tafels die de leerling in staat stellen ln x en e^x in vier decimalen nauwkeurig op te zoeken. Door gebruik te maken van $e^{2,303} \approx 10$ en $\ln 10 = 2,30259$ kan men de omvang van deze tafels tot een minimum beperken. Daarop volgen tafels betreffende de goniometrische functies uit de analyse (van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$) en de cyclometrische functies. Tot slot nog een tafel betreffende de normale verdeling.
De tafels geven dus alles wat tegenwoordig van belang is in het secundair onderwijs. Ze zijn overzichtelijk uitgevoerd. Om ze goed te hanteren is wel een behoorlijke dosis routine vereist.

P.G.J. Vredenduin

Schaltwerk- und Automatentheorie II Clemens Hackl uitgave in de reeks 'Informatik' van de 'Sammlung Göschen' uitgever Walter de Gruyter DM 14.80.

In de literatuur over computerconstructie en computergebruik bestaat een niemandsland tussen het werkterrein van de electronicus en dat van de programmeur.
Hackl beschrijft dit gebied op heldere wijze, ook voor de niet electronisch geschoolde lezer.
Hij introduceert daartoe een wiskundige voorstelling van diverse aspecten van machineconstructie en van de machine operaties. Het boek bestaat uit twee gedeelten. In het eerste gedeelte worden asynchrone schakelingen in eindige automaten beschreven middels een binair gecodeerde toestandentabel.
In het tweede gedeelte volgt de beschrijving van de afhandeling der instructies in meer ingewikkelde systemen, beschreven wordt de informatiestroom tussen de beschikbare registers en het geheugen, hoofdzakelijk in de vorm van microprogramma's.

D. Oudshoorn

Ontvangen boeken

Drs. A.J. Jacobs e.a., Moderne wiskunde voor voortgezet onderwijs, deel 4, havo en v.w.o., derde herziene druk.
Wolters-Noordhof b.v., Groningen, 235 blz., *f* 13,50.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

321 Een 'dambord' strekt zich naar rechts en naar beneden onbegrensd ver uit. De rijen en de kolommen zijn genummerd 0, 1, 2, . . . Op het veld (0, 0) staat een kubus, waarvan het grondvlak congruent met dit veld is. Het bovenvlak van de kubus is rood; de overige zijvlakken niet. De kubus kan over het dambord voortbewogen worden door hem om een ribbe te kantelen. De kubus wordt op deze wijze voortbewogen, totdat het grondvlak op het veld (p, q) komt. Dit geschiedt zo, dat het rode vlak dan weer het bovenvlak is geworden. Er wordt gevraagd het minimale aantal kantelingen, dat hiervoor vereist is, uit te drukken in p en q.

322 Definitie. Onder een half-regelmatig veelvlak verstaan we een veelvlak, dat voldoet aan de volgende eisen:
a. het is convex,
b. het wordt uitsluitend begrensd door regelmatige veelhoeken,
c. de veelvlakshoeken gevormd door de vlakken, die in een hoekpunt samenkomen, zijn alle congruent.
Niet geëist wordt dus, dat alle zijvlakken evenveel hoekpunten hebben.
Er wordt gevraagd, welke half-regelmatige veelvlakken er, behalve de regelmatige, mogelijk zijn.

Oplossingen

319 Noem de punten van het ene deel witte punten en die van het andere zwarte punten. Onderstel er zijn op de cirkelomtrek drie witte punten, die hoekpunten zijn van een scherp- of rechthoekige driehoek. Dan moeten er op de omtrek drie zwarte punten zijn, die hoekpunten zijn van een met de witte congruente driehoek. Neem nu aan, dat het middelpunt een wit punt is. Dan zou het ook zwart moeten zijn. De aanname leidt dus tot een contradictie.
Neem dus aan, dat er op de cirkelomtrek niet drie dergelijke punten zijn. Kies op de omtrek drie punten, die hoekpunten zijn van een gelijkzijdige driehoek. Dan zijn er twee van dezelfde kleur, b.v. wit, en de derde is van de andere kleur, dus zwart. Laat (zie fig.) A en B wit en C zwart zijn. Men ziet dan gemakkelijk in, dat de diametraal tegenover AB gelegen gesloten boog DE geheel uit zwarte punten bestaat en dat dus de gesloten boog AB geheel uit witte punten bestaat. Kies nu F willekeurig op boog BD. Onderstel, dat F een witte punt is. Dan is het diametraal tegenover F gelegen punt G zwart en bovendien boog GE zwart. Waaruit weer volgt, dat boog FB wit is. Uit deze redenering volgt (uit het ongerijmde), dat op de cirkelomtrek de witte punten een aan de ene zijde open en aan de andere gesloten halve cirkel vormen en de zwarte eveneens. De enige transformatie, die een dergelijke witte halve cirkel in een zwart deel van de cirkelschijf kan doen overgaan, is de rotatie om het middelpunt over 180°. De onderstelling, dat het middelpunt wit is, zou dan weer tot gevolg hebben, dat het middelpunt zwart is. We stuiten weer op een contradictie.
De gevraagde verdeling is dus niet mogelijk.

320
Omdat

$$\frac{EVE}{DID} = \frac{TALK}{9999}, \frac{EVE}{DID} \text{ onvereenvoudigbaar is en } 9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$$

is

$$DID = 101 \vee DID = 303 \vee DID = 909$$

a. $DID = 101$ is niet mogelijk, omdat er dan voor EVE niets meer overblijft.
b. Uit $DID = 909$ volgt

$$EVE \cdot 11 = TALK$$

Dan zou $E = K$ en daarmee vervalt ook de mogelijkheid $DID = 909$.
c. Dus is $DID = 303$.

$$EVE \cdot 33 = TALK$$

$E = 1$ levert $K = 3$, hetgeen niet kan wegen $D = 3$.
Dus $E = 2$.
Het gemakkelijkst is nu niet slim te zijn en eenvoudig te proberen:

$202 \cdot 33 = 6666$	$252 \cdot 33 = 8316$
$212 \cdot 33 = 6996$	$262 \cdot 33 = 8646$
$222 \cdot 33 = 7326$	$272 \cdot 33 = 8976$
$232 \cdot 33 = 7656$	$282 \cdot 33 = 9306$
$242 \cdot 33 = 7986$	$292 \cdot 33 = 9636$

Dus: $EVE = 242$.
Wie lust heeft verder te puzzelen kan nagaan, dat men hetzelfde antwoord vindt, als men de eis van onvereenvoudigbaarheid laat vallen.

Mathematica & Paedagogia

Willen de abonnees op bovengenoemd tijdschrift voor hun abonnement gedurende 1975 *f* 15,– storten op giro 933434 t.n.v. de penningmeester van Euclides te Doorwerth? Gaarne voor 1 december.
Opzeggen van het abonnement moet eveneens voor 1 december geschieden. Nieuwe abonnees kunnen zich opgeven door het bedrag te storten en op de girostrook bij te schrijven 'nieuw abonnee'. Indien men (zonder prijsverhoging) ook de Franstalige uitgave wenst te ontvangen moet dit afzonderlijk vermeld worden.

P. G. J. Vredenduin

INHOUD